Tomislav Igić **Marina Mijalković** **Marina Trajković**

ZBIRKA ZADATAKA ZA PRIJEMNI ISPIT

IZ

MEHANIKE

Niš, 2007.

ZBIRKA ZADATAKA ZA PRIJEMNI ISPIT
IZ
MEHANIKE

Dr Tomislav Igić, dipl.inž.arh.
redovni profesor, Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu
Dr Marina Mijalković, dipl.inž.građ.
vanredni profesor, Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu
Mr Marina Trajković, dipl.inž.građ.
asistent, Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu

Recenzenti:
Dr Milivoje Stanković, dipl.inž.građ.
redovni profesor, Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu
Dr Branko Popović, dipl.inž.građ.
redovni profesor, Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu

Izdavač:
Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu
Aleksandra Medvedeva 14

Odobreno za štampu odlukom Naučno-nastavnog veća
Građevinsko-arhitektonskog fakulteta Niš
broj 8/45 od 04.05.2007.god.

Za izdavača:
Dekan, prof. dr Dragan Aranđelović

Tehnička obrada:
Dr Marina Mijalković, Bojan Milošević

Korice:
mr Petar Dančević

Štampa:
«Galeb» Niš

Prelom i slog:
Dr Marina Mijalković

Tiraž:
300 primeraka

ISBN 978-86-80295-78-7

PREDGOVOR

Ova zbirka rešenih zadataka za prijemni ispit iz Tehničke mehanike sadrži urađene zadatke od kojih su gotovo svi bili zadati na prijemnim ispitima iz Tehničke mehanike na Građevinsko – arhitektonskom fakultetu Univerziteta u Nišu u proteklom višegodišnjem periodu. Sačinjen je kvalitativan izbor karakterističnih zadataka što će omogućiti efikasnu pripremu kandidata za polaganje prijemnog ispita. Zbirka omogućava savladavanje esencijalnog znanja iz ove oblasti u okviru srednjoškolskog programa, a ujedno pruža osnovu za dalja izučavanja iz predmeta Tehnička mehanika i Otpornost materijala, kao pomoćni udžbenik.

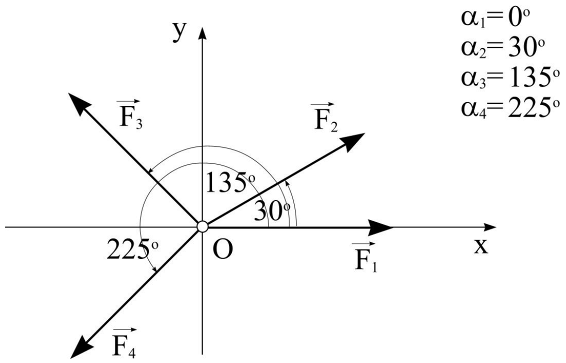
Autori se zahvaljuju recenzentima, prof. dr Milivoju Stankoviću i prof. dr Branku Popoviću na datim sugestijama i korisnim savetima koji su doprineli kvalitetu ove zbirke zadataka. U kompjuterskoj obradi ove zbirke učestvovao je i dipl. ing. Bojan Milošević, na čemu mu se zahvaljujemo.

Autori

U Nišu, 2007. godine

STATIKA U RAVNI

1. Odrediti rezultantu sistema sila koji deluje u tački O, kao što je pokazano na slici.
   F_1=10kN, F_2=20kN, F_3=30kN, F_4=10kN.



Projekcija vektora sile na osu jednaka je proizvodu intenziteta vektora sile i kosinusa ugla α koji napadna linija vektora sile zaklapa sa pozitivnim smerom ose. Znak projekcije određen je znakom kosinusa ugla koji vektor sile zaklapa sa pozitivnim smerom ose na koju se vrši projektovanje. Analitički izrazi projekcija vektora sile na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema xOy su:

$X = F\cos\alpha, \quad Y = F\sin\alpha.$

Ako se ugao koji vektor sile F_1 gradi sa osom x označi sa α_1, ugao vektora sile F_2 sa α_2 itd, onda su projekcije komponentnih sila datog sistema sila na ose Ox i Oy:

$$X_1 = F_1\cos\alpha_1 = F_1\cos 0^0 = 10\cdot 1 = 10\,\text{kN}, \quad Y_1 = F_1\sin\alpha_1 = F_1\sin 0^0 = 0,$$

$$X_2 = F_2\cos\alpha_2 = F_2\cos 30^0 = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,\text{kN},$$

$$Y_2 = F_2\sin\alpha_2 = F_2\sin 30^0 = 20\frac{1}{2} = 10\,\text{kN},$$

$$X_3 = F_3\cos\alpha_3 = F_3\cos 135^0 = F_3\cos\left(180^0 - 45^0\right) = -F_3\cos 45^0 = -30\frac{\sqrt{2}}{2} = -15\sqrt{2}\,\text{kN},$$

$$Y_3 = F_3\sin\alpha_3 = F_3\sin 135^0 = F_3\sin\left(180^0 - 45^0\right) = F_3\sin 45^0 = 30\frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}\,\text{kN},$$

$$X_4 = F_4\cos\alpha_4 = F_4\cos 225^0 = F_4\cos\left(180^0 + 45^0\right) = -F_4\cos 45^0 = -10\frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2}\,\text{kN},$$

$$Y_4 = F_4\sin\alpha_4 = F_4\sin 225^0 = F_4\sin\left(180^0 + 45^0\right) = -F_4\sin 45^0 = -10\frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2}\text{kN}.$$

Projekcija rezultujućeg vektora na proizvoljno izabranu osu jednaka je algebarskom zbiru projekcija njegovih komponentnih vektora na tu istu osu. Da bi se analitičkim putem odredila rezultanta sistema sila u ravni potrebno je odrediti projekcije rezultante na pravce osa Ox i Oy:

$$X_R = \sum_{i=1}^{4} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10 + 10\sqrt{3} - 15\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = -0.964\,\mathrm{kN},$$

$$Y_R = \sum_{i=1}^{4} Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0 + 10 + 15\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 24.142\,\mathrm{kN}.$$

Intenzitet rezultante se određuje primenom Pitagorine teoreme:

$$R = \sqrt{|X_R|^2 + |Y_R|^2} = \sqrt{0.964^2 + 24.142^2} = 24.16\,\mathrm{kN}.$$

Da bi rezultanta bila potpuno određena, potrebno je odrediti i ugao koji njena napadna linija zaklapa sa osom Ox. Ovaj ugao se određuje primenom obrasca:

$$\sin\alpha_R = \frac{Y_R}{R}, \quad \cos\alpha_R = \frac{X_R}{R}, \quad \mathrm{tg}\alpha_R = \frac{Y_R}{X_R}.$$

Na osnovu algebarskih znakova projekcija rezultante na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema može se zaključiti u kom kvadrantu tog sistema se nalazi rezultujući vektor. Kako je projekcija rezultante na pravac ose Ox sa negativnim znakom, a projekcija na pravac ose y sa pozitivnim znakom, vektor rezultante se nalazi u drugom kvadarantu izabranog pravouglog koordinatnog sistema. Ako se oštar ugao koji rezultanta zaklapa sa osom Ox obeleži sa α onda je:

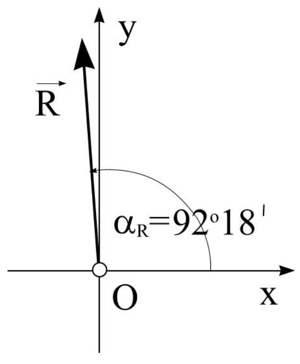
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|Y_R|}{|X_R|} = \frac{24.142}{0.964} = 25.0435,$$

a odavde je:

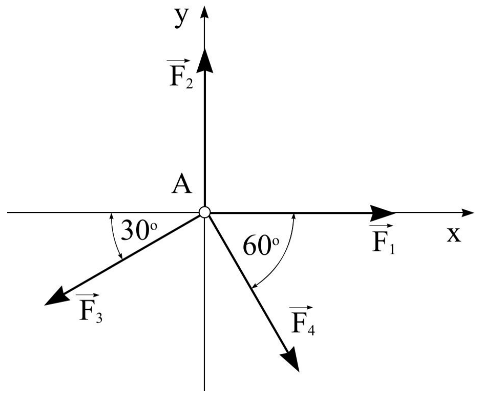
$$\alpha = \mathrm{arctg}\,25.0435 = 87°42',$$

pa je konačno ugao koji rezultanta zaklapa sa pozitivnim smerom ose Ox (drugi kvadrant):

$$\alpha_R = 180° - 87°42' = 92°18'.$$



2. Odrediti veličinu i pravac rezultante datih sila koje dejstvuju na materijalnu tačku A analitičkim putem. F_1=3kN, F_2=2kN, F_3=4kN, F_4=5kN.



Sila F_1 se nalazi na osi Ox, pa je ugao α_1 koji vektor sile F_1 gradi sa osom Ox jednak nuli, sila F_2 se nalazi na osi Oy pa je ugao koji vektor sile F_2 zaklapa sa osom Ox $\alpha_2=90^0$, ugao koji napadna linija sile F_3 zaklapa sa pozitivnim smerom ose Ox je $\alpha_3=210^0$ i ugao koji napadna linija sile F_4 zaklapa sa pozitivnim smerom ose Ox je $\alpha_4=300^0$. Projekcije komponentnih sila datog sistema sila na ose Ox i Oy su:

$$X_1 = F_1\cos\alpha_1 = F_1\cos 0^0 = 3\,\text{kN}, \quad Y_1 = F_1\sin\alpha_1 = F_1\sin 0^0 = 0,$$

$$X_2 = F_2\cos\alpha_2 = F_2\cos 90^0 = 0, \quad Y_2 = F_2\sin\alpha_2 = F_1\sin 90^0 = 2\,\text{kN},$$

$$X_3 = F_3\cos\alpha_3 = F_3\cos\left(180^0 + 30^0\right) = -F_3\cos 30^0 = -4\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}\,\text{kN},$$

$$Y_3 = F_3\sin\alpha_3 = F_3\sin\left(180^0 + 30^0\right) = -F_3\sin 30° = -4\cdot\frac{1}{2} = -2\,\text{kN},$$

$$X_4 = F_4\cos\alpha_4 = F_4\cos\left(360^0 - 60^0\right) = F_4\cos 60^0 = 5\cdot\frac{1}{2} = 2.5\,\text{kN},$$

$$Y_4 = F_4\sin\alpha_4 = F_4\cos\left(360^0 - 60^0\right) = -F_4\sin 60° = -5\frac{\sqrt{3}}{2} = -2.5\sqrt{3}\,\text{kN}.$$

Algebarski zbirovi projekcija vektora datog sistema sila na ose izabranog koordinatnog sistema su:

$$X_R = \sum_{i=1}^{4} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 3.0 + 0 - 2\sqrt{3} + 2.5 = 2.04\,\text{kN},$$

$$Y_R = \sum_{i=1}^{4} Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0 + 2 - 2 - 2.5\sqrt{3} = -4.33\,\text{kN}.$$

Intenzitet vektora rezultante je:

$$R = \sqrt{|X_R|^2 + |Y_R|^2} = \sqrt{2.04^2 + 4.33^2} = 4.78\,\text{kN}.$$

Kako je projekcija rezultante na pravac ose Ox sa pozitivnim znakom, a projekcija na pravac ose Oy sa negativnim znakom, vektor rezultante se nalazi u četvrtom kvadarantu izabranog pravouglog koordinatnog sistema. Ako se oštar ugao koji rezultanta zaklapa sa osom Ox obeleži sa α onda je:

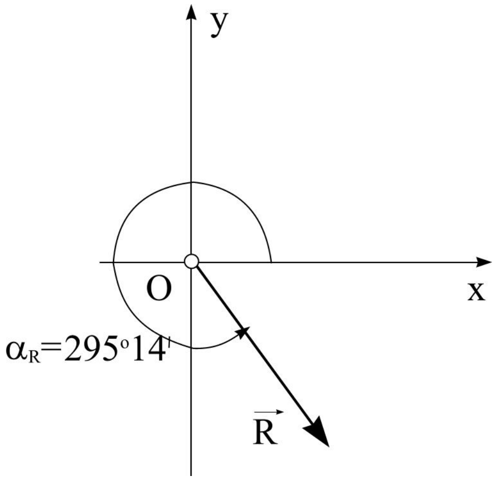
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|Y_R|}{|X_R|} = \frac{4.33}{2.04} = 2.11,$$

a odavde je:

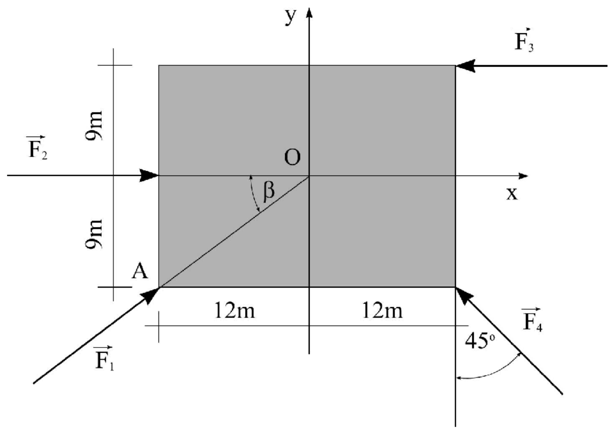
$$\alpha = \mathrm{arc\,tg}\,2.11 = 64°46',$$

pa je konačno ugao koji rezultanta zaklapa sa pozitivnim smerom ose Ox (četvrti kvadrant):

$$\alpha_R = 360° - 64°46' = 295°14'.$$



3. Na ploču bez težine dejstvuju sile F_1, F_2, F_3, i F_4. Odrediti veličinu i pravac rezultante tih sila. F_1=10kN, F_2=2.5kN, F_3=2.5kN, i $F_4=4\sqrt{2}$kN.



Svaki sistem sila u ravni se može zameniti njemu ekvivalentnom silom, rezultantom. Da bi se analitičkim putem odredila rezultanta sistema sila u ravni potrebno je odrediti projekcije rezultante na pravce osa Ox i Oy. One su jednake algebarskim zbirovima projekcija komponentnih sila. Napadna linija sile F_1, kao što je na slici pokazano, je u pravcu dijagonale pravougaone ploče, pa ugao α_1 koji ona zaklapa sa pozitivnim smerom ose Ox može da se odredi na osnovu pravouglog trougla čije su katete 12m i 9m:

$$\overline{OA} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15, \quad \cos\alpha_1 = \frac{12}{15} = 0.8, \quad \sin\alpha_1 = \frac{9.0}{15.0} = 0.6.$$

Sila F_2 je u pravcu ose Ox, pa je $\alpha_2=0^0$, sila F_3 je paralelna sa osom Ox, ali u negativnom smeru, pa je $\alpha_3=180^0$, a sila F_4 je u drugom kvadrantu jer je usmerena tako da joj je projekcija na Ox osu negativna, a projekcija na osu Oy pozitivna. Ugao koji sila F_4 zaklapa sa pozitivnim smerom ose Ox je $\alpha_4=135^0$.

Projekcije sila na pravce osa Ox i Oy su:

$$X_1 = F_1\cos\alpha_1 = 10\cdot 0.80 = 8\,\text{kN}, \quad Y_1 = F_1\sin\alpha_1 = 10\cdot 0.60 = 6\,\text{kN},$$

$$X_2 = F_2\cos\alpha_2 = F_2\cos 0^0 = 2.5\cdot 1 = 2.5\,\text{kN}, \quad Y_2 = F_2\sin\alpha_2 = F_2\sin 0^0 = 2.5\cdot 0 = 0,$$

$$X_3 = F_3\cos\alpha_3 = F_3\cos 180^0 = 2.5\cdot(-1) = -2.5\,\text{kN}, \quad Y_3 = F_3\sin\alpha_3 = F_3\sin 180^0 = 2.5\cdot 0 = 0,$$

$$X_4 = F_4\cos 135^0 = F_4\cos\left(180^0 - 45^0\right) = -F_4\cos 45° = -4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -4\,\text{kN},$$

$$Y_4 = F_4\sin 135° = F_4\sin\left(180^0 - 45^0\right) = F_4\sin 45^0 = 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\,\text{kN}.$$

Projekcije rezultante na pravce osa Ox i Oy su:

$$X_R = \sum_{i=1}^{4} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8 + 2.5 - 2.5 - 4 = 4\,\text{kN},$$

$$Y_R = \sum_{i=1}^{4} Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 6 + 0 + 0 + 4 = 10\,\text{kN},$$

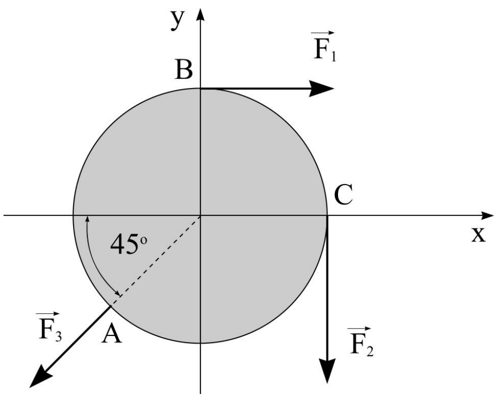
Intenzitet rezultante datog sistema sila je:

$$R = \sqrt{{X_R}^2 + {Y_R}^2} = \sqrt{4^2 + 10^2} = 10.77\,\text{kN}.$$

Projekcije rezultante na pravce osa Ox i Oy dobijene su sa pozitivnim znakom, pa se zaključuje da se vektor rezultante nalazi u prvom kvadrantu pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema. Ugao koji vektor rezultante zaklapa sa osom Ox je:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_R = \frac{|Y_R|}{|X_R|} = \frac{10}{4} = 2.5, \quad \Rightarrow \quad \alpha_R = \mathrm{arctg}\,2.5 = 68°11'.$$

4. Na kružnu ploču poluprečnika R = 4m dejstvuju tri sile u tačkama A, B i C, kao što je na slici prikazano. Odrediti rezultantu datih sila.
   F_1=8kN, F_2=2kN, F_3=3√2kN.



Sa slike je očigledno da se napadne linije sila seku u jednoj tački. Sila F_1 je pod uglom $\alpha_1=0^0$ u odnosu na osu Ox, sila F_2 je pod uglom $\alpha_2=270^0$, a sila F_3 pod uglom $\alpha_3=225^0$, tako da su projekcije sila sistema na pravce osa Ox i Oy:

$$X_1 = F_1\cos\alpha_1 = F_1\cos0^0 = 8\cdot1 = 8\,\text{kN}, \quad Y_1 = F_1\sin\alpha_1 = F_1\sin0^0 = 8\cdot0 = 0\text{kN},$$

$$X_2 = F_2\cos\alpha_2 = F_2\cos270^0 = 2\cdot0 = 0\text{kN}, \quad Y_2 = F_2\sin\alpha_2 = F_2\sin270^0 = 2\cdot(-1) = -2\,\text{kN},$$

$$X_3 = F_3\cos\alpha_3 = F_3\cos225^0 = F_3\cos\left(180^0+45^0\right) = -F_3\cos45° = -3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -3\,\text{kN},$$

$$Y_3 = F_3\sin\alpha_3 = F_3\sin225^0 = F_3\sin\left(180^0+45^0\right) = -F_3\sin45° = -3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -3\,\text{kN}.$$

Projekcije rezultante na pravce osa Ox i Oy su:

$$X_R = \sum_{i=1}^{3} X_i = X_1 + X_2 + X_3 = 8 + 0 - 3 = 5\,\text{kN},$$

$$Y_R = \sum_{i=1}^{3} Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0 - 2 - 3 = -5\,\text{kN}.$$

Intenzitet rezultante je:

$$R = \sqrt{|X_R|^2 + |Y_R|^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\,\text{kN}.$$

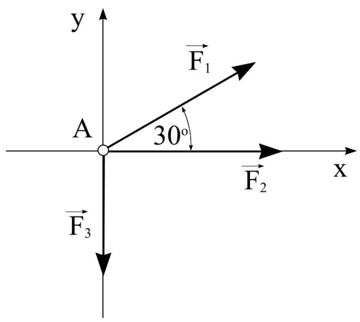
Kako je projekcija rezultante na pravac ose Ox sa pozitivnim znakom, a projekcija na pravac ose Oy sa negativnim znakom, vektor rezultante se nalazi u četvrtom kvadarantu Dekartovog koordinatnog sistema. Ugao nagiba koji vektor zaklapa sa osom Ox je:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|Y_R|}{|X_R|} = \frac{5}{5} = 1, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathrm{arctg}\,1 = 45^0,$$

a ugao vektora rezultante sa osom Ox (četvrti kvadrant):

$$\alpha_R = 360^0 - 45^0 = 315^0.$$

5. Tri sile dejstvuju na tačku A. Koliku silu F_4 treba dodati ovim silama da bi tačka A bila u ravnoteži? F_1=4kN, $F_2=6\sqrt{3}$ kN, F_3=2kN.



Sistem sila u ravni čije se napadne linije seku u jednoj tački biće u ravnoteži ako je rezultanta jednaka nuli, tj. ako je vektorski zbir sila jednak nuli:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0.$$

Analitički uzraz za određivanje intenziteta rezultante sistema sila u ravni sa zajedničkom napadnom tačkom glasi:

$$R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2}.$$

Intenzitet rezultante biće jednak nuli samo ako su istovremeno ispunjeni uslovi:

$$X_R = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0.$$

Ove jednačine predstavljaju analitičke uslove ravnoteže sistema sila u ravni čije se napadne linije seku u jednoj tački. Sistem sila u ravni čije se napadne linije seku u jednoj tački je u ravnoteži ako su algebarski zbirovi projekcija svih sila tog sistema na svaku od osa izabranog koordinatnog sistema istovremeno jednaki nuli. Shodno tome, datom sistemu, koga čine sile F_1 pod uglom $\alpha_1=30^0$, sila F_2, pod uglom $\alpha_2=0^0$ i sila F_3 pod uglom $\alpha_3=270^0$ u odnosu na osu Ox, treba pridodati silu F_4 pod uglom α_4 i primeniti analitičke uslove ravnoteže sistema sila u ravni čije se napadne linije seku u jednoj tački:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 + F_4 \cos\alpha_4 = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 + F_4 \sin\alpha_4 = 0, \qquad (2)$$

$$(1):\ F_1 \cos 30^0 + F_2 \cos 0^0 + F_3 \cos 270^0 + F_4 \cos\alpha_4 = 4\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\sqrt{3}\cdot 1 + 2\cdot 0 + F_4 \cos\alpha_4 = 0,$$

$$(2):\ F_1 \sin 30^0 + F_2 \sin 0^0 + F_3 \sin 270^0 + F_4 \sin\alpha_4 = 4\frac{1}{2} + 6\sqrt{3}\cdot 0 + 2(-1) + F_4 \sin\alpha_4 = 0.$$

Iz prve jednačine se dobija projekcija sile F_4 na x pravac:

$F_4 \cos\alpha_4 = -8\sqrt{3}\,kN, \quad (3)$

a iz druge projekcija sile na y pravac:

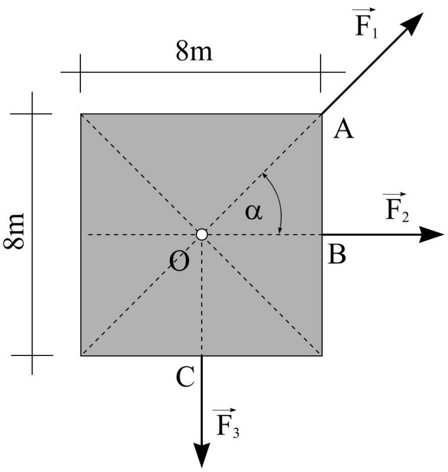
$F_4 \sin\alpha_4 = 0. \quad (4)$

Ako su poznate projekcije sile, intenzitet sile se određuje na osnovu Pitagorine teoreme:

$$F_4 = \sqrt{\left|F_4 \cos\alpha_4\right|^2 + \left|F_4 \sin\alpha_4\right|^2} = \sqrt{\left(8\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = 8\sqrt{3}\,kN.$$

Projekcija sile na pravac ose Ox je sa negativnim znakom, dok je projekcija sile na pravac ose Oy jednaka nuli, što znači da se vektor sile F_4 nalazi na osi Ox, a ugao koji ona zaklapa sa Ox osom je $\alpha_4 = 180^0$.

6. Na ploču dejstvuju tri sile, kao što je na slici pokazano. Koliku silu F_4 treba dodati ovim silama tako da ploča bude u ravnoteži. F_1=5kN, F_2=6kN, F_3=13kN.



Na kvadratnu ploču deluje sistem sila čije se napadne linije seku u tački O. Datom sistemu, koga čine sile F_1, pod uglom $\alpha_1=45^0$, sila F_2, pod uglom $\alpha_2=0^0$ i sila F_3 pod uglom $\alpha_3=270^0$ u odnosu na osu Ox, , treba pridodati silu F_4 pod uglom α_4 i primeniti analitičke uslove ravnoteže sistema sila u ravni čije se napadne linije seku u jednoj tački:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 + F_4 \cos\alpha_4 = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 + F_4 \sin\alpha_4 = 0, \qquad (2)$$

$$(1):\ F_1 \cos 45^0 + F_2 \cos 0^0 + F_3 \cos 270^0 + F_4 \cos\alpha_4 = 5\frac{\sqrt{2}}{2} + 6\cdot 1 + 13\cdot 0 + F_4 \cos\alpha_4 = 0,$$

$$(2):\ F_1 \sin 45^0 + F_2 \sin 0^0 + F_3 \sin 270^0 + F_4 \sin\alpha_4 = 5\frac{\sqrt{2}}{2} + 6\cdot 0 + 13\cdot(-1) + F_4 \sin\alpha_4 = 0.$$

Iz prve jednačine se dobija projekcija sile F_4 na x pravac:

$F_4 \cos\alpha_4 = X_4 = -9.53\,kN, \quad (3)$

a iz druge projekcija sile na y pravac:

$F_4 \sin\alpha_4 = Y_4 = 9.46\,kN. \quad (4)$

Intenzitet sile F_4 je:

$$F_4 = \sqrt{|X_4|^2 + |Y_4|^2} = \sqrt{9.53^2 + 9.46^2} = 13.43\,\text{kN}.$$

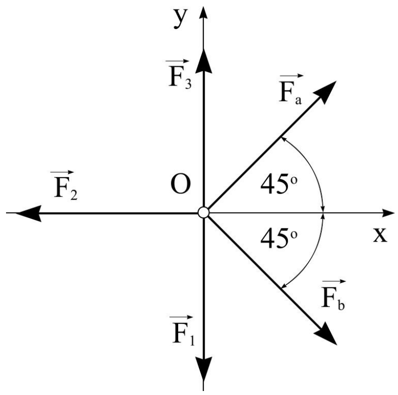
Projekcija sile F_4 na pravac ose Ox je sa negativnim znakom, dok je projekcija sile na pravac ose Oy sa pozitivnim znakom, što znači da se sila F_4 nalazi u drugom kvadrantu. Nagib napadne linije sile je:

$$\text{tg}\alpha = \frac{|Y_4|}{|X_4|} = \frac{9.46}{9.53} = 0.99265, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{arctg}\,0.99265 = 44°47',$$

pa je konačno:

$$\alpha_4 = 180° - 44°47' = 135°13'.$$

7. Odrediti sile F_a i F_b koje treba dodati silama prikazanim na slici da bi rezultanta sistema bila jednaka nuli. F_1=300kN, F_2=100kN, F_3=300kN.



Pravci sila F_a i F_b su poznati, a njihovi intenziteti se mogu odrediti iz uslova ravnoteže sistema sila čije se napadne linije seku u istoj tački:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 + F_a \cos\alpha_a + F_b \cos\alpha_b = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 + F_a \sin\alpha_a + F_b \sin\alpha_b = 0, \qquad (2)$$

$$(1):\; F_1 \cos 270^0 + F_2 \cos 180^0 + F_3 \cos 90^0 + F_a \cos 45^0 + F_b \cos 315^0 = 0,$$

$$300\cdot 0 + 100\cdot(-1) + 300\cdot 0 + F_a \frac{\sqrt{2}}{2} + F_b \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

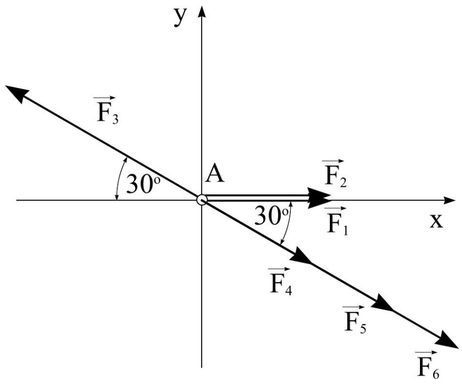
$$(2):\; F_1 \sin 270^0 + F_2 \sin 180^0 + F_3 \sin 90^0 + F_a \sin 45^0 + F_b \sin 315^0 = 0,$$

$$300\cdot(-1) + 100\cdot 0 + 300\cdot 1 + F_a \frac{\sqrt{2}}{2} + F_b \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Rešavanjem sistema jednačina dobijaju se vrednosti traženih sila F_a i F_b:

$$F_a = F_b = 50\sqrt{2}\,\text{kN}.$$

8. Sistem sila dejstvuje na tačku A, kao što je prikazano na slici. Kolika treba da bude sila F_6 da bi se rezultanta poklopila sa x osom? F_1=2kN, F_2=2kN, F_3=12kN, F_4=2kN, F_5=6kN.



Da bi se rezultanta sistema sila čije se napadne linije seku u tački A poklopila sa osom x, potrebno je da njena projekcija na y osu bude jednaka nuli:

$$Y_R = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0. \quad (1)$$

Pravac vektora sile F_6 je poznat, a njen intenzitet se može odrediti iz jednačine (1):

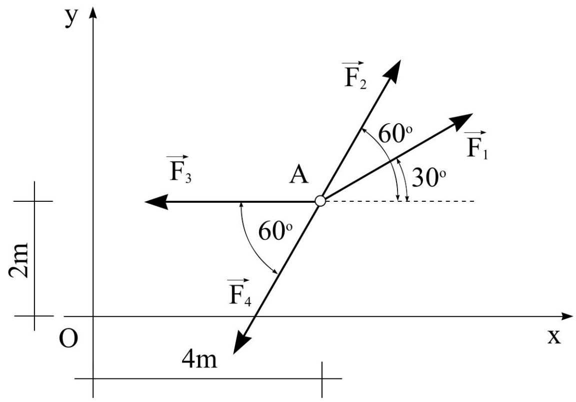
$$Y_R = \sum_{i=1}^{6} Y_i = 0 \Rightarrow F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 + F_4 \sin\alpha_4 + F_5 \sin\alpha_5 + F_6 \sin\alpha_6 = 0,$$

$$F_1 \sin 0^0 + F_2 \sin 0^0 + F_3 \sin 150^0 + F_4 \sin 330^0 + F_5 \sin 330^0 + F_6 \sin 330^0 = 0,$$

$$F_1 \sin 0^0 + F_2 \sin 0^0 + F_3 \sin\left(180^0 - 30^0\right) + F_4 \sin\left(360^0 - 30^0\right) + F_5 \sin\left(360^0 - 30^0\right) + F_6 \sin\left(360^0 - 30^0\right) = 0,$$

$$2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + F_6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow F_6 = 4\text{kN}.$$

9. Sistem sučeonih sila koji dejstvuje u tački A zameniti sa dve sile od kojih će jedna delovati u x a druga y pravcu, tako da se dejstvo na tačku A ne promeni. Odrediti moment ovih sila u odnosu na tačku O. F_1=4kN, F_2=6kN, F_3=8kN, F_4=2kN.



Ako se jedan sistem sila koji deluje na slobodno telo može zameniti drugim sistemom sila ne remeteći pri tom njegovu ravnotežu, odnosno ne menjajući njegovo kretanje, takva dva sistema sila su ekvivalentna. Dati sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ i sistem sila $\vec{F}_5, \vec{F}_6$ su ekvivalentni, što znači da su im rezultante iste:

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_2,$$

a samim tim i njihove projekcije na pravce osa Ox i Oy:

$$X_{R_1} = X_{R_2}, \quad (1)$$

$$Y_{R_1} = Y_{R_2}. \quad (2)$$

Jedna od sila novog sistema treba da deluje u x pravcu, a druga u y pravcu. Ako se pretpostavi da je sila $\vec{F}_5$ u x pravcu, onda je njena projekcija na osu Oy jednaka nuli. Sila $\vec{F}_6$ je, u tom slučaju u y pravcu, pa je njena projekcija na pravac ose Ox jednaka nuli. Projekcije rezultante datog sistema sila na pravce osa Ox i Oy su:

$$X_{R_1} = \sum_{i=1}^{4} X_i = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 + F_4 \cos\alpha_4,$$

$$X_{R_1} = F_1 \cos 30^0 + F_2 \cos 60^0 + F_3 \cos 180^0 + F_4 \cos 240^0 = 4\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\frac{1}{2} + 8(-1) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.54\text{kN},$$

$$Y_{R_1} = \sum_{i=1}^{4} Y_i = F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 + F_4 \sin\alpha_4,$$

$$Y_{R_1} = F_1 \sin 30^0 + F_2 \sin 60^0 + F_3 \sin 180^0 + F_4 \sin 240^0 = 4\frac{1}{2} + 6\frac{\sqrt{3}}{2} + 8 \cdot 0 + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5.46\text{kN},$$

dok su projekcije rezultante ekvivalentnog sistema sila na pravce osa Ox i Oy:

$$X_{R_2} = \sum_{i=1}^{2} X_i = F_5 \cos\alpha_5 + F_6 \cos\alpha_6 = F_5 \cos 0^0 + F_6 \cos 90^0 = F_5 \cdot 1 + F_6 \cdot 0 = F_5,$$

$$Y_{R_2} = \sum_{i=1}^{2} Y_i = F_5 \sin\alpha_5 + F_6 \sin\alpha_6 = F_5 \sin 0^0 + F_6 \sin 90^0 = F_5 \cdot 0 + F_6 \cdot 1 = F_6.$$

Zamenom projekcija rezultanti u izraze (1) i (2) dobijaju se intenziteti sila $\vec{F}_5$ i $\vec{F}_6$:

$F_5 = -2.54\text{kN}, \quad F_6 = 5.46\text{kN}.$

Sila F_5 je u negativnom smeru ose Ox, pa je njen moment u odnosu na tačku O pozitivan i iznosi:

$M_O = F_5 \cdot y = 2.54 \cdot 2 = 5.08\text{kNm},$

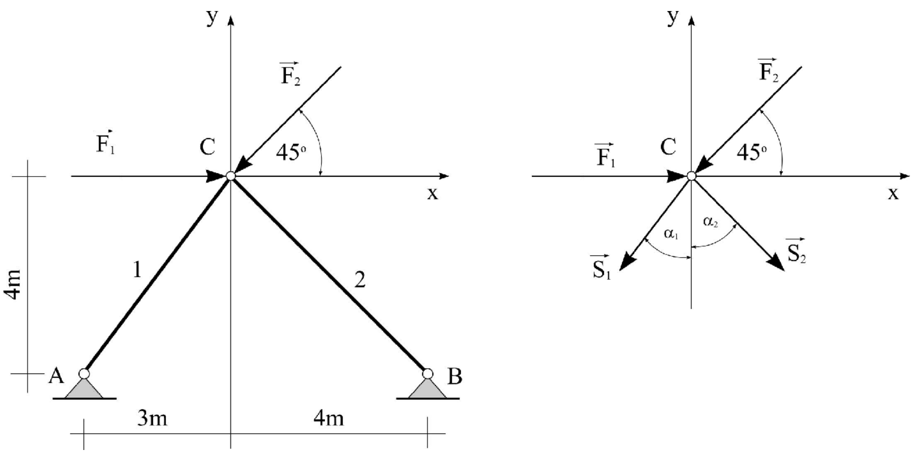
dok je sila F_6 u smeru ose Oy, pa je njen moment u odnosu na tačku O takođe pozitivan i iznosi:

$M_O = F_6 \cdot x = 5.46 \cdot 4 = 21.84\text{kNm}.$

Moment rezultante dveju sila sa zajedničkom napadnom tačkom u odnosu na proizvoljno izabranu momentnu tačku O koja leži u istoj ravni sa silama, jednak je algebarskom zbiru momenata njenih komponentnih sila u odnosu na istu tačku, pa je shodno ovoj teoremi, moment rezultante datog sistema sila u odnosu na tačku O:

$M_O = M_O\left(F_5\right) + M_O\left(F_6\right) = 26.92\,\text{kNm}.$

10. Iz uslova ravnoteže materijalne tačke C odrediti sile u štapovima AC i BC.
F_1=8kN, F_2=4√2 kN.



U tački C deluju četiri sile: aktivne sile F_1 i F_2 i unutrašnje sile u štapovima AC i BC, koje će biti obeležene kao S_1 i S_2.

Iz slike sledi:

$$\sin\alpha_1 = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{4}{5}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sile u štapovima se određuju iz uslova ravnoteže čvora C:

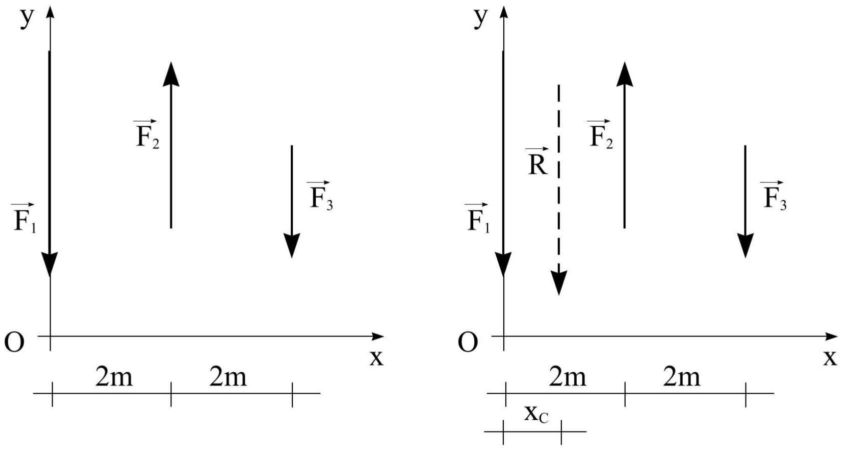
$$\sum X_i = 0 \Rightarrow F_1 - F_2\cos 45^0 - S_1\sin\alpha_1 + S_2\sin\alpha_2 = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow -F_2\sin 45^0 - S_1\cos\alpha_1 - S_2\cos\alpha_2 = 0, \qquad (2)$$

Rešenja sistema jednačina (1) i (2) su sile u štapovima:

$S_1 = 0, \quad S_2 = -4\sqrt{2}\,\text{kN}.$

11. Odrediti rezultantu i položaj rezultante datog sistema paralelnih sila u odnosu na dati koordinatni sistem. F_1=6kN, F_2=4kN, F_3=2kN.



Rezultanta sistema paralelnih sila je jednaka algebarskom zbiru sila:

$$R=Y_R = \sum_{i=1}^{3} Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 = -6+4-2 = -4\,\text{kN}.$$

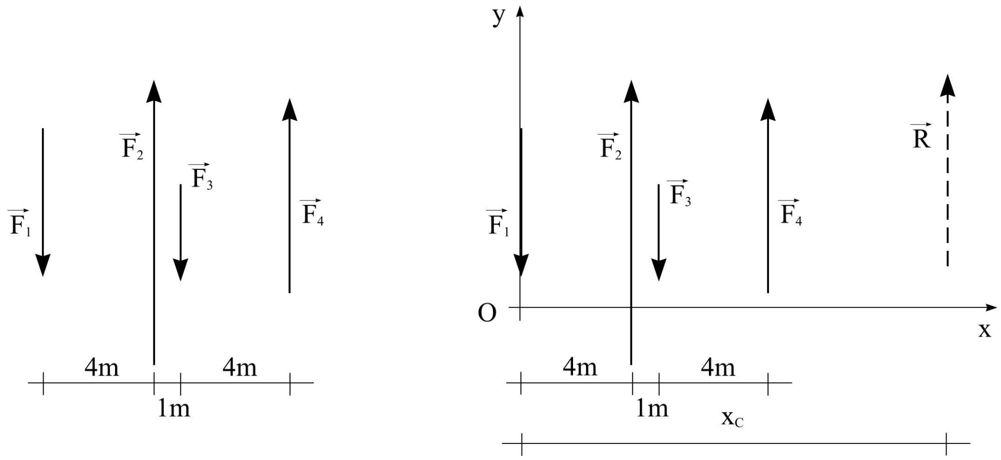
Rezultanta sistema paralelnih sila je paralelna datim silama, a njen položaj se određuje primenom Varinjonove teoreme: moment rezultante u odnosu na proizvoljnu momentnu tačku koja leži u istoj ravni sa silama, jednak je algebarskom zbiru momenata komponentnih sila u odnosu na istu momentnu tačku. Ako se za momentnu tačku odabere koordinatni početak, a krak rezultante u odnosu na tačku O obeleži sa x_C, onda je:

$$M_O\left(\vec{R}\right) = M_O\left(\vec{F}_1\right) + M_O\left(\vec{F}_2\right) + M_O\left(\vec{F}_3\right),$$

$$R \cdot x_C = \sum_{i=1}^{3} F_i \cdot x_i,$$

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} F_i \cdot x_i}{R} = \frac{F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 2 - F_3 \cdot 4}{R} = \frac{4 \cdot 2 - 2 \cdot 4}{-4} = \frac{8-8}{-4} = 0.$$

12. Za dati sistem paralelnih sila odrediti veličinu rezultante i njen položaj.
F_1=4kN, F_2=8kN, F_3=2kN, F_4=5kN.



Koordinatni sistem treba postaviti tako da sile budu paralelne sa jednom od osa. Postaviće se osa y tako da se poklapa sa napadnom linijom sile F_1.

Rezultanta sistema paralelnih sila je paralelna sa silama sistema, a njen intenzitet je jednak algebarskom zbiru sila:

$$R = Y_R = \sum_{i=1}^{4} Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = -4 + 8 - 2 + 5 = 7\,\text{kN}.$$

Položaj rezultante sistema paralelnih sila se određuje primenom Varinjonove teoreme. Ako se za momentnu tačku odabere koordinatni početak, a krak rezultante u odnosu na tačku O obeleži sa x_C, onda je:

$$M_O(\vec{R}) = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) + M_O(\vec{F}_3) + M_O(\vec{F}_4),$$

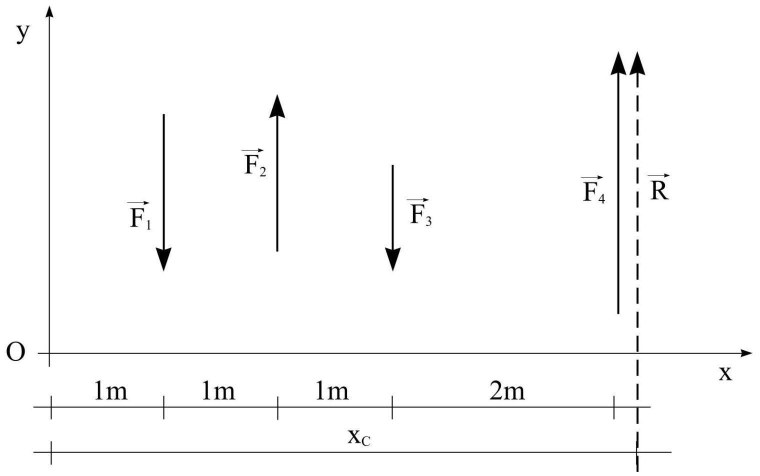
$$R \cdot x_C = \sum_{i=1}^{4} F_i \cdot x_i,$$

odakle je:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{4} F_i \cdot x_i}{R} = \frac{F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 4 - F_3 \cdot 5 + F_4 \cdot 9}{R},$$

$$x_C = \frac{8 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 5 \cdot 9}{7} = \frac{67}{7} = 9.57\,\text{m}.$$

13. Odrediti veličinu i položaj rezultante sistema paralelnih sila datih na slici analitičkim putem. F_1=80kN, F_2=120kN, F_3=40kN, F_4=200kN.



Rezultanta sistema paralelnih sila je paralelna sa silama sistema, a njen intenzitet je jednak algebarskom zbiru sila:

$$R=Y_R=\sum_{i=1}^{4} Y_i = F_1+F_2+F_3+F_4=-80+120-40+200=200\,\text{kN}.$$

Položaj rezultante sistema paralelnih sila se može odrediti primenom Varinjonove teoreme. Moment rezultante u odnosu na proizvoljno izabranu tačku u ravni dejstva sila jednak je algebarskom zbiru momenata komponentnih sila u odnosu na istu tačku. Ako se krak rezultante u odnosu na koordinatni početak obeleži sa x_C onda je:

$$M_O(\vec{R})=M_O(\vec{F}_1)+M_O(\vec{F}_2)+M_O(\vec{F}_3)+M_O(\vec{F}_4),$$

to jest:

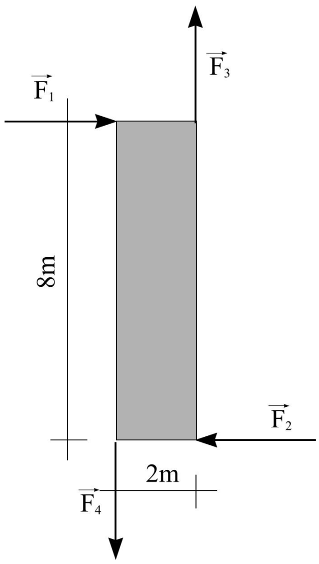
$$R\cdot x_C=\sum_{i=1}^{4} F_i\cdot x_i,$$

odakle je krak rezultante u odnosu na momentnu tačku:

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{4} F_i\cdot x_i}{R}=\frac{-F_1\cdot 1+F_2\cdot 2-F_3\cdot 3+F_4\cdot 5}{R},$$

$$x_C=\frac{-80\cdot 1+120\cdot 2-40\cdot 3+200\cdot 5}{200}=5.2\,\text{cm}.$$

14. Na ploču oblika pravougaonika deluju sile F_1, F_2, F_3 i F_4, kao na slici. Kolike treba da budu vrednosti sila F_3 i F_4 da bi ploča bila u ravnoteži?



F_1=10kN, F_2=10kN.

Sile F_1 i F_2 su istog intenziteta, suprotnog smera, paralelnih napadnih linija, pa čine spreg sila, čiji je moment m_1. Sile F_3 i F_4 su takođe suprotnog smera, deluju duž paralelnih napadnih linija, što znači da i one moraju da budu istih intenziteta i da čine spreg sila, čiji moment m_2 treba da bude jednak momentu m_1 , da bi telo bilo u ravnoteži.

$$m_1 = F_1 \cdot d_1 = 10 \cdot 8 = 80\,\text{kNm},$$

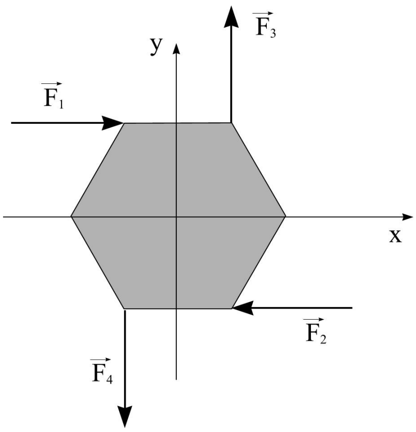
$$m_2 = F_3 \cdot d_2 = F_3 \cdot 2,$$

$$m_1 = m_2,$$

$$80 = F_3 \cdot 2,$$

$$F_3 = F_4 = \frac{80}{2} = 40\,\text{kN}.$$

15. Na ploču oblika pravilnog šestaougaonika stranice a=2m deluju sile F_1, F_2, F_3, F_4 prema crtežu. Kolike treba da budu vrednosti sila F_3 i F_4 da bi ploča bila u ravnoteži, ako je F_1=F_2=10kN?



Sile F_1 i F_2 su istog intenziteta, suprotnog smera, paralelnih napadnih linija, pa čine spreg sila, čiji je moment:

$$m_1 = F_1 \cdot 2h,$$

gde je h visina jednakostraničnog trougla stranice a:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\text{m},$$

$$m_1 = F_1 \cdot 2h = 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 20\sqrt{3}\,\text{kNm}.$$

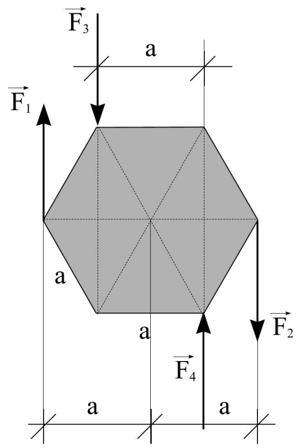
Sile F_3 i F_4 su takođe suprotnog smera, deluju duž paralelnih napadnih linija na rastojanju a. Da bi ploča bila u ravnoteži i one treba da budu istih intenziteta i da čine spreg sila, čiji moment m_2 treba da bude jednak momentu m_1:

$$m_1 = m_2,$$

$$m_2 = F_3 \cdot a = F_3 \cdot 2,$$

$$20\sqrt{3} = F_3 \cdot 2, \quad \Rightarrow \quad F_3 = F_4 = 10\sqrt{3}\,\text{kN}.$$

16. Na ploču oblika pravilnog šestaougaonika stranice a=1m deluju sile F_1, F_2, F_3, F_4 prema crtežu. Kolike treba da budu vrednosti sila F_3 i F_4 da bi ploča bila u ravnoteži ako su sile F_1 i F_2 intenziteta 20kN?



Sile F_1 i F_2 su istog intenziteta, suprotnog smera, paralelnih napadnih linija, pa čine spreg sila, čiji je moment:

$$m_1 = F_1 \cdot 2a.$$

Sile F_3 i F_4 su takođe suprotnog smera, deluju duž paralelnih napadnih linija na rastojanju 2a. Da bi ploča bila u ravnoteži i one treba da budu istih intenziteta i da čine spreg sila, čiji moment m_2 treba da bude jednak momentu m_1:

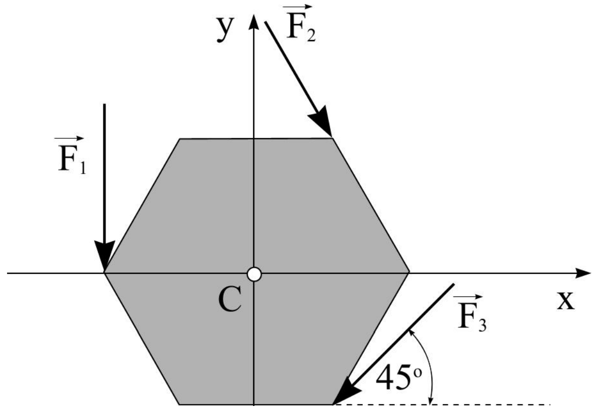
$$m_1 = m_2,$$

$$m_2 = F_3 \cdot a,$$

$$F_1 \cdot 2a = F_3 \cdot a,$$

$$F_3 = F_4 = 2F_1 = 40\,\text{kN}.$$

17. Izvršiti analitičkim putem redukciju sila F_1, F_2, i F_3 na težište površine pravilnog šestougaonika čije su stranice po 2m. F_1=40kN, $F_2=10\sqrt{3}$kN, $F_3=20\sqrt{2}$kN.



Proizvoljan sistem sila u ravni može se redukovati u proizvoljno izabranu tačku O u ravni dejstva sila i svesti na jednu silu $\vec{R}'$ koja deluje u tački O i naziva se glavni vektor sistema sila i spreg sila čiji je momenta $\mathbf{M}_R$ jednak glavnom momentu M_O sistema sila za izabranu redukcionu tačku O.
Glavni vektor je jednak vektorskom zbiru svih sila sistema:

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i ,$$

Moment rezultujućeg sprega je jednak algebarskom zbiru momenata pojedinih sila datog sistema u odnosu na izabranu redukcionu tačku O. Ovaj rezultujući moment se naziva glavni moment sistema za redukcionu tačku:

$$\mathbf{M}_R = \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = M_O .$$

Intenzitet glavnog vektora ne zavisi od izbora redukcione tačke i određuje se iz:

$$R' = \sqrt{X_R'^2 + Y_R'^2}, \quad X_R' = \sum X_i' = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i , \quad Y_R' = \sum Y_i' = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin\alpha_i ,$$

a ugao α_R koji glavni vektor zaklapa sa pozitivnim smerom ose Ox se određuje iz:

$$\cos\alpha_R = \frac{X_R'}{R'}, \quad \cos\beta_R = \frac{Y_R'}{R'}, \text{ tj. } \operatorname{tg}\alpha_R = \frac{Y_R'}{R'},$$

gde su X_i' i Y_i' projekcije sila sistema koje su redukcijom premeštene u redukcionu tačku.
Dati sistem sila treba redukovati u tačku C – težište šestougaonika stranice dužine 2m, u čijim temenima deluju sile kao na slici. Šestougaonik je površina sastavljena od šest jednakostraničnih trouglova čije su visine $h = a\cdot\sin 60° = a\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ m.
Redukcijom ovih sila na tačku C dobija se sistem sučeonih sila koji može da se zameni glavnim vektorom i sistem spregova koji može da se zameni jednim rezultujućim spregom čiji je moment jednak glavnom momentu.
Projekcije glavnog vektora na ose izabranog koordinatnog sistema su:

$$X'_R = \sum_{i=1}^{3} X'_i = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 = 40\cos 270^0 + 10\sqrt{3}\cos 300^0 + 20\cos 225^0,$$

$$X'_R = 40 \cdot 0 + 10\sqrt{3}\frac{1}{2} + 20\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 + 5\sqrt{3} - 20 = -11.34\,\text{kN},$$

$$Y'_R = \sum_{i=1}^{3} Y_i = F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 = 40\sin 270^0 + 10\sqrt{3}\sin 300^0 + 20\sin 225^0,$$

$$Y'_R = 40 \cdot (-1) + 10\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 20\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -40 - 15 - 20 = -75\,\text{kN}.$$

Intenzitet glavnog vektora je:

$$R' = \sqrt{|X'_R|^2 + |Y'_R|^2} = \sqrt{11.34^2 + 75^2} = 75.85\,\text{kN}.$$

Kako su projekcije glavnog vektora na obe ose negativne, može se zaključiti da se glavni vektor nalazi u trećem kvadrantu. Ugao koji glavni vektor zaklapa sa pozitivnim smerom ose Cx je:

$$\text{tg}\,\alpha_R = 180^0 + \text{arc tg}\frac{75}{11.34} = 180^0 + 81^0 23'2'' = 261^0 23'2''.$$

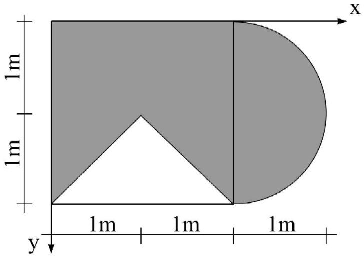
Intenzitet momenta redukcionog sprega (glavni moment) je:

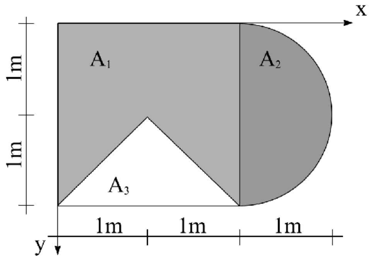
$$M_C = M_C(\vec{F}_1) + M_C(\vec{F}_2) + M_C(\vec{F}_3) = F_1 \cdot a - F_2 \cdot h - F_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} - F_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot h,$$

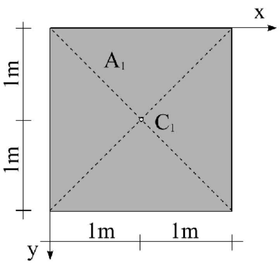
$$M_C = 40 \cdot 2 - 10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 20\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 20\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = -4.64\,\text{kNm}.$$

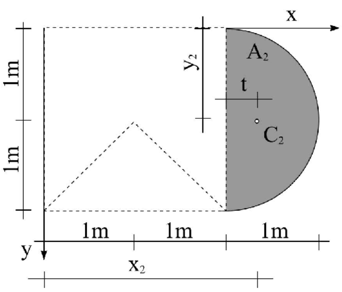
TEŽIŠTA

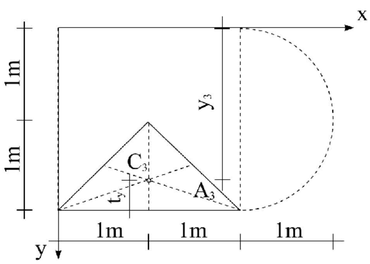
1. Odrediti koordinate težišta šrafirane površine.











Položaj težišta se primenom analitičkog postupka određuje tako što se data složena površina podeli na više površina za koje se položaj težišta može lako odrediti. Zatim se izračunaju površine pojedinih delova A_i i odrede koordinate težišta pojedinih delova x_i i y_i u odnosu na usvojen koordinatni sistem. Sile kojima se prikazuju osnovne površine postave se u položaj paralelan sa osom Oy i primeni se Varinjonova teorema u odnosu na koordinatni početak:

$$x_C \cdot A = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A_i ,$$

gde je $A=A_1+A_2+...+A_n$ rezultanta sistema paralelnih sila (površina). Rešavajući jednačinu po x_C dobija se koordinata težišta složene površine:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A_i}{A}.$$

Zatim se sile kojima se prikazuju pojedine površine postave u položaj paralelan sa osom Ox. Primenom Varinjonove teoreme u odnosu na koordinatni početak se dobija koordinata y_C težišta složene površine.

Datu složenu površinu treba podeliti na delove čije su površine A_1, A_2 i A_3 i koordinate težišta C_1, C_2 i C_3 u odnosu na Dekartov koordinatni sistem, kao što je na slici prikazano. Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- kvadrat stranice a=2m

$$A_1 = a \cdot a = 2 \cdot 2 = 4m^2, \quad x_1 = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1m, \quad y_1 = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1m,$$

- polukrug poluprečnika R=1m

$$A_2 = \frac{R^2 \pi}{2} = \frac{1^2 \pi}{2} = 1.57m^2, \; t = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 1}{3\pi} = 0.42m, \; x_2 = 2+t = 2.42m, \; y_2 = 1m,$$

- trougao osnovice a=2m, visine h=1m

$$A_3 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1m^2, \quad t_x = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1m, \quad t_y = \frac{h}{3} = \frac{1}{3} = 0.33m,$$

$x_3 = t_x = 1m, \quad y_3 = 2 - t_y = 1.667m.$

Koordinate težišta date složene površine određuju se primenom obrazaca:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 - x_3A_3}{A_1 + A_2 - A_3}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 - y_3A_3}{A_1 + A_2 - A_3}.$$

Zamenom odgovarajućih površina i koordinata njihovih težišta u ove izraze dobija se:

$$x_C = \frac{1 \cdot 4 + 2.42 \cdot 1.57 - 1 \cdot 1}{4 + 1.57 - 1} = 1.49m, \quad y_C = \frac{1 \cdot 4 + 1 \cdot 1.57 - 1.667 \cdot 1}{4 + 1.57 - 1} = 0.85m.$$

Težište složene površine je tačka C sa koordinatama (1.49m, 0.85m).

2. Analitičkim putem odrediti položaj težišta šrafirane površine.

Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- pravougaonik stranica a=9m, b=4m

$$A_1 = a \cdot b = 9 \cdot 4 = 36m^2, \quad x_1 = \frac{a}{2} = \frac{9}{2} = 4.50m, \quad y_1 = \frac{b}{2} = \frac{4}{2} = 2m,$$

- trougao osnovice a=5m, visine h=3m

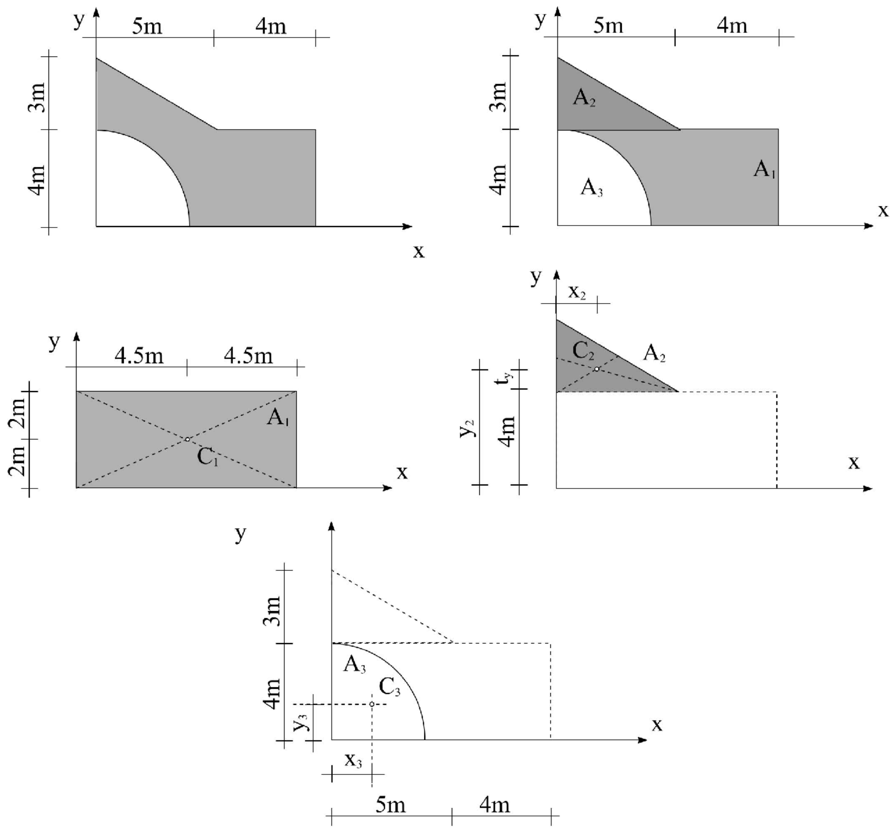
$$A_2 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7.5m^2, \quad t_x = \frac{a}{3} = \frac{5}{3} = 1.67m, \quad t_y = \frac{h}{3} = \frac{3}{3} = 1m,$$

$x_2 = t_x = 1.67m, \quad y_2 = 4 + t_y = 5m,$

- četvrtina kruga poluprečnika R=4m

$$A_3 = \frac{R^2 \pi}{4} = \frac{4^2 \pi}{4} = 12.57m^2, \quad t_x = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 4}{3\pi} = 1.7m, \quad t_y = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 4}{3\pi} = 1.7m,$$

$x_3 = t_x = 1.7m, \quad y_3 = t_y = 1.7m.$



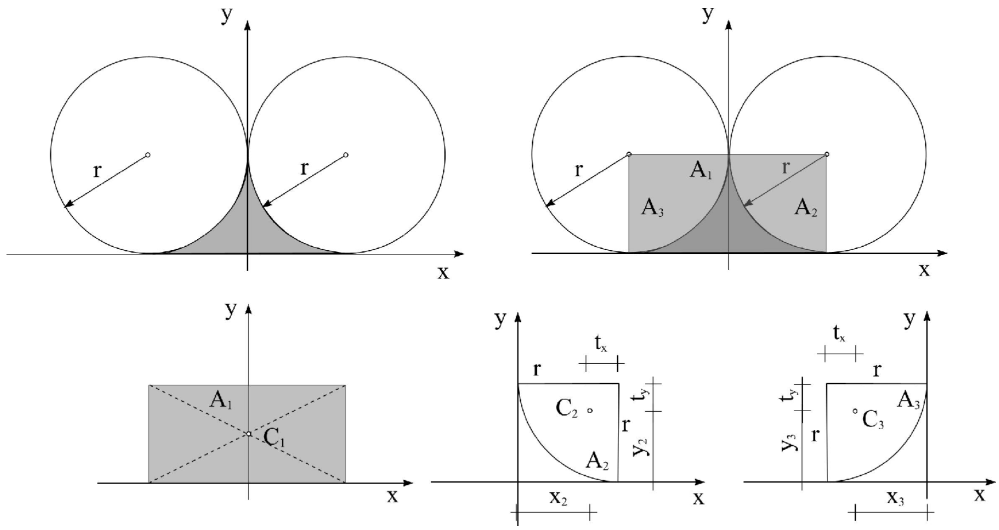
Koordinate težišta složene površine su:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 - x_3A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{4.5 \cdot 36 + 1.67 \cdot 7.5 - 1.7 \cdot 12.57}{36 + 7.50 - 12.57} = 4.95\text{m},$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 - y_3A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{2 \cdot 36 + 5 \cdot 7.5 - 1.7 \cdot 12.57}{36 + 7.5 - 12.57} = 2.85\text{m}.$$

Težište složene površine je tačka C (4.95m, 2.85m).

3. Odrediti koordinatu y_C težišta šrafirane površine, ako je r=20cm.



Složena površina ima jednu osu simetrije. Koordinatni sistem je postavljen tako da se osa Oy poklapa sa osom simetrije date površine, pošto se na njoj nalazi težište. Koordinata težišta x_C je jednaka nuli pa je potrebno odrediti samo koordinatu y_C.

Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- pravougaonik stranica a=2r, b=r

$$A_1 = a \cdot b = 2r \cdot r = 2r^2 = 2 \cdot 20^2 = 800\text{cm}^2, \quad y_1 = \frac{r}{2} = \frac{20}{2} = 10\text{cm},$$

- četvrtina kruga poluprečnika r=20cm

$$A_2 = \frac{r^2\pi}{4} = \frac{20^2\pi}{4} = 314.15\text{cm}^2, \quad t_y = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4\cdot 20}{3\pi} = 8.48\text{cm}, \quad y_2 = 20 - t_y = 11.52\text{cm},$$

- četvrtina kruga poluprečnika r=20cm

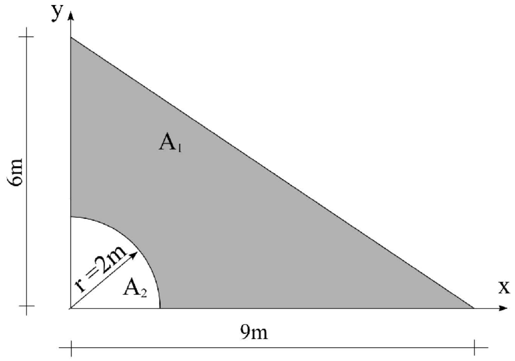
$$A_3 = \frac{r^2\pi}{4} = \frac{20^2\pi}{4} = 100\pi = 314.15\text{cm}^2, \; t_y = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4\cdot 20}{3\pi} = 8.48\text{cm}, \; y_3 = 20 - t_y = 11.52\text{cm}.$$

Koordinata y_C težišta složene površine je:

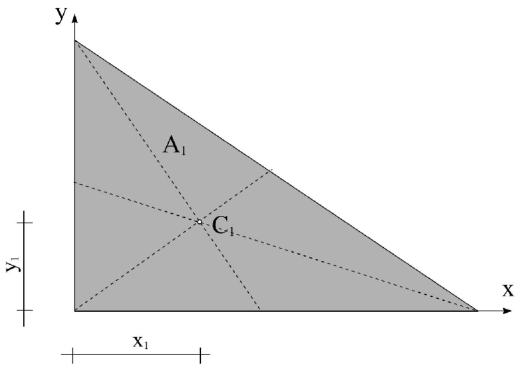
$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{y_1A_1 - y_2A_2 - y_3A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{10\cdot 800 - 11.52\cdot 314.15 - 11.52\cdot 314.15}{800 - 314.15 - 314.15} = 4.44\text{cm}^2.$$

Težište složene površine je tačka C (0, 4.44cm).

4. Odrediti koordinate težišta šrafirane površine.



Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:



- trougao osnovice a=9m, visine h=6m

$$A_1 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27\text{m}^2,$$

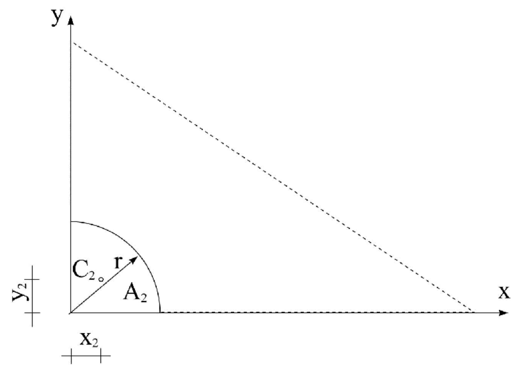
$$x_1 = \frac{a}{3} = \frac{9}{3} = 3\text{m}, \quad y_1 = \frac{h}{3} = \frac{6}{3} = 2\text{m},$$

- četvrtina kruga poluprečnika r=2m

$$A_2 = \frac{R^2 \pi}{4} = \frac{2^2 \pi}{4} = \pi = 3.14\text{m}^2,$$

$$x_2 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 2}{3\pi} = 0.85\text{m}, \quad y_2 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 2}{3\pi} = 0.85\text{m}.$$

Koordinate težišta složene površine su:

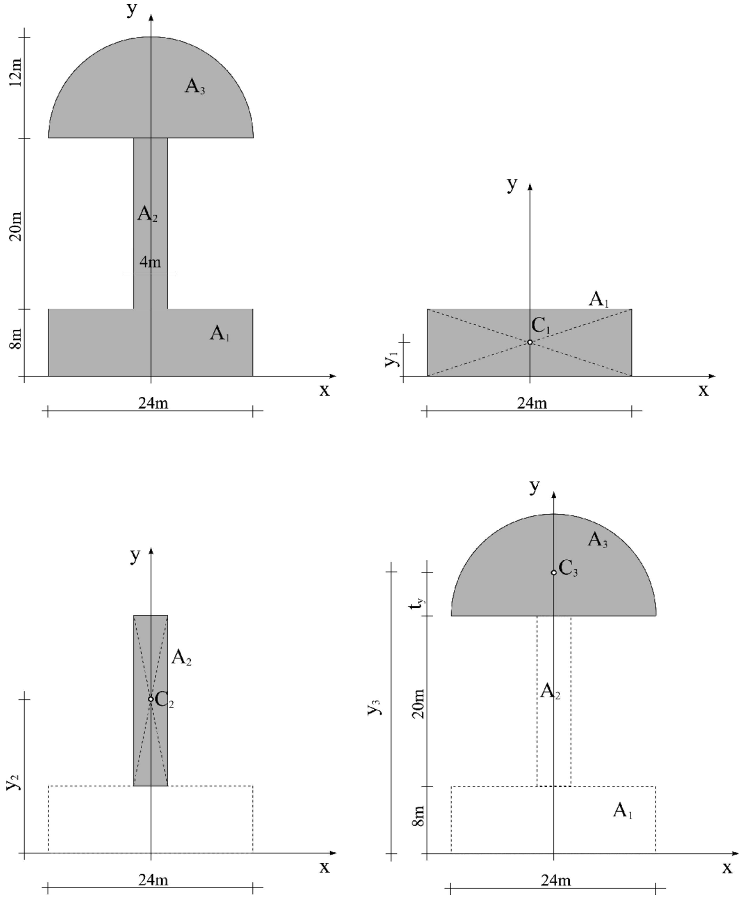


$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2},$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2},$$

$$x_C = \frac{3 \cdot 27 - 0.85 \cdot 3.14}{27 - 3.14} = 3.28\text{m}, \quad y_C = \frac{2 \cdot 27 - 0.85 \cdot 3.14}{27 - 3.14} = 2.15\text{m}.$$

5. Odrediti koordinate težišta date ravne figure analitičkim putem.



Data površina je simetrična u odnosu na y osu. Težište se nalazi na osi simetrije što znači da je $x_C=0$, dok udaljenje težišta od x ose treba izračunati.

Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- pravougaonik stranica a=24m, b=8m

$$A_1 = a \cdot b = 24 \cdot 8 = 192\text{m}^2, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{b}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{m},$$

- pravougaonik stranica a=4m, b=20m

$$A_2 = a \cdot b = 4 \cdot 20 = 80\text{m}^2, \quad x_2 = 0\text{m}, \quad y_2 = 8 + \frac{b}{2} = 8 + \frac{20}{2} = 18\text{m},$$

- polukrug poluprečnika R=12m

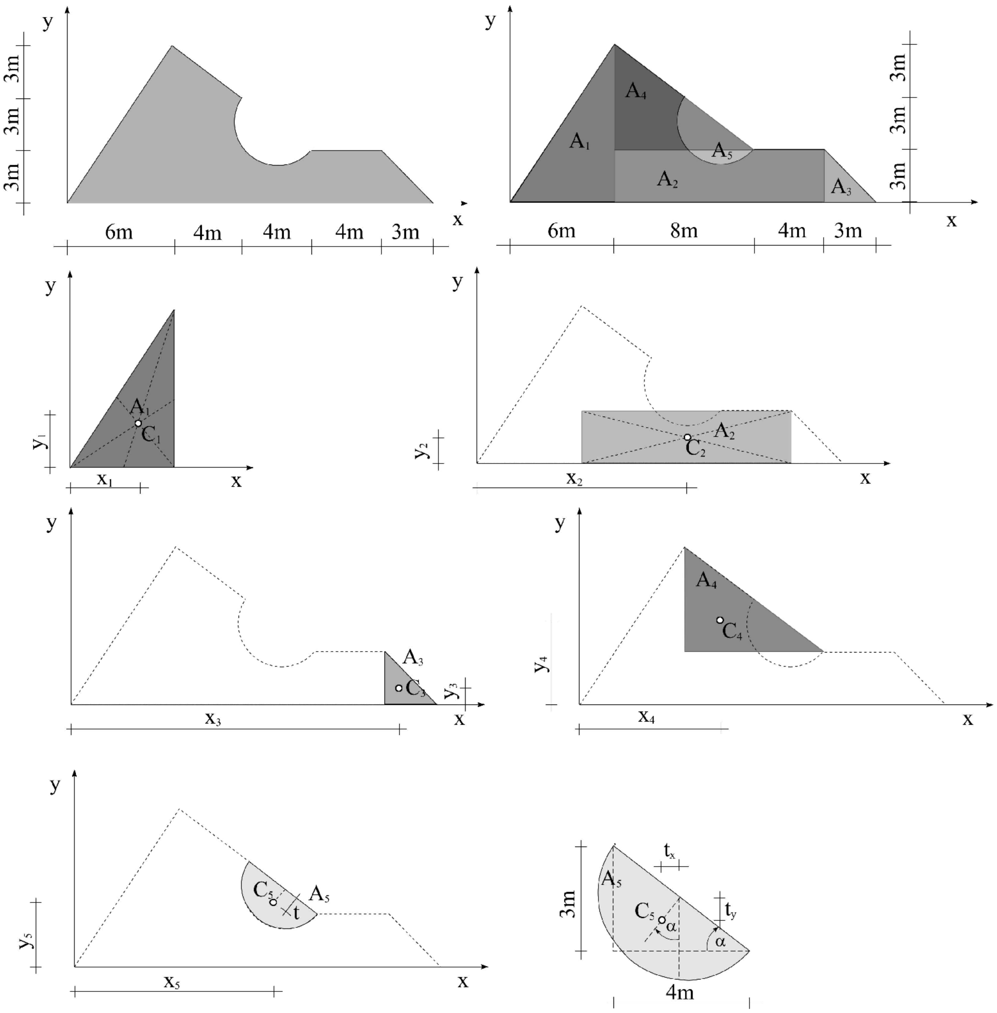
$$A_3 = \frac{R^2\pi}{2} = \frac{12^2\pi}{2} = 226.2\text{m}^2, \quad x_2 = 0\text{m}, \quad y_2 = 28 + \frac{4R}{3\pi} = 28 + \frac{4 \cdot 12}{3\pi} = 28 + 5.1 = 33.1\text{m}.$$

Koordinata y_C težišta složene površine je:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{4 \cdot 192 + 18 \cdot 80 + 33.1 \cdot 226.2}{192 + 80 + 226.2} = 19.46\text{m}.$$

Težište složene površine je tačka C (0, 19.46m).

6. Odrediti koordinate težišta ravne figure na slici.



Data složena površina je podeljena na pet delova i to: trougao površine A_1, pravougaonik površine A_2, trougao površine A_3, trougao površine A_4 i polovina kružne površine A_5, čiji je prečnik $D = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{m}$, pod uglom α u odnosu na horizontalu, kao što je na slici prikazano. Koordinate težišta pojedinih delova i njihove površine su:

- trougao osnovice a=6m, visine h=9m

$$A_1 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27m^2, \quad x_1 = \frac{2a}{3} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4m, \quad y_1 = \frac{h}{3} = \frac{9}{3} = 3m,$$

- pravougaonik stranica a=12m, b=3m

$$A_2 = a \cdot b = 12 \cdot 3 = 36m^2, \quad x_2 = 6 + \frac{a}{2} = 6 + 6 = 12m, \quad y_2 = \frac{b}{2} = \frac{3}{2} = 1.5m,$$

- trougao osnovice a=3m, visine h=3m

$$A_3 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4.5m^2, \quad x_3 = 18 + \frac{a}{3} = 19m, \quad y_3 = \frac{h}{3} = \frac{3}{3} = 1m,$$

- trougao osnovice a=8m, visine h=6m

$$A_4 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24m^2, \quad x_4 = 6 + \frac{a}{3} = 6 + \frac{8}{3} = 8.667m, \quad y_4 = 3 + \frac{h}{3} = 3 + \frac{6}{3} = 5m,$$

- polukrug poluprečnika R=2.5m

$$A_5 = \frac{R^2 \pi}{2} = \frac{2.5^2 \pi}{2} = 9.82m^2, \quad t = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 2.50}{3\pi} = 1.06m,$$

$$t_x = t \sin\alpha = 1.06 \frac{3}{5} = 0.64m, \quad t_y = t \cos\alpha = 1.06 \frac{4}{5} = 0.85m,$$

$$x_5 = 12 - t_x = 11.682m, \quad y_5 = 4.50 - t_y = 3.65m.$$

Koordinate težišta složene površine su:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 - x_5 A_5}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5},$$

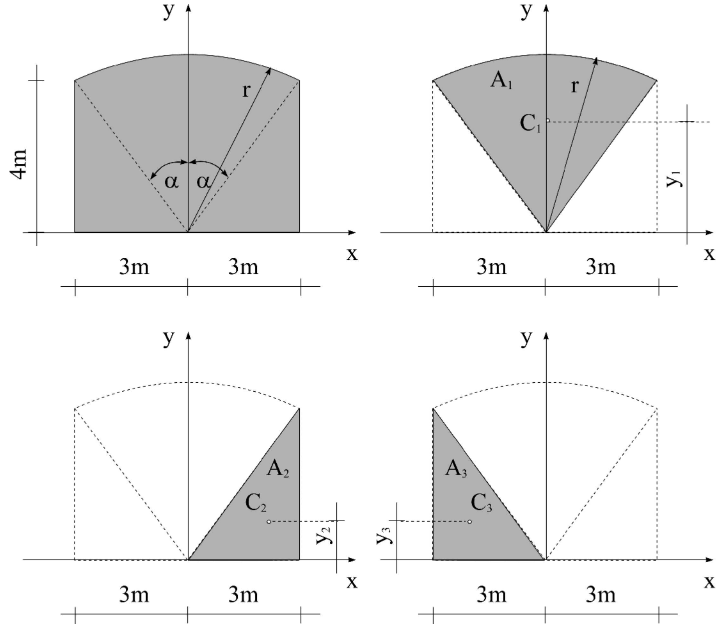
$$x_C = \frac{4 \cdot 27 + 12 \cdot 36 + 19 \cdot 4.50 + 8.667 \cdot 24 - 11.36 \cdot 9.82}{27 + 36 + 4.50 + 24 - 9.82} = 8.69m,$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 + y_4 A_4 - y_5 A_5}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - A_5},$$

$$y_C = \frac{3 \cdot 27 + 1.5 \cdot 36 + 1 \cdot 4.5 + 5 \cdot 24 - 3.65 \cdot 9.82}{27 + 36 + 4.5 + 24 - 9.82} = 2.74m.$$

Težište složene površine je tačka C (8.69m, 2.74m).

7. Za datu ravnu figuru odrediti koordinatu y_C težišta.



Data površina je simetrična u odnosu na y osu pa se težište nalazi na toj osi. Treba izračunati udaljenje težišta od ose x.
Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- kružni isečak poluprečnika $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{m}$, zahvaćen ugao 2α ($\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$)

$$A_1 = r^2\alpha = 5^2 \cdot \arcsin\frac{3}{5} = 25 \cdot 0.643 = 16.075\text{m}^2, \quad y_1 = \frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}\frac{5\cdot\frac{3}{5}}{\arcsin\frac{3}{5}} = 3.11\text{m},$$

- trougao osnovice a=3m, visine h=4m

$$A_2 = \frac{a\cdot h}{2} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6\text{m}^2, \quad y_2 = \frac{h}{3} = \frac{4}{3}\text{m},$$

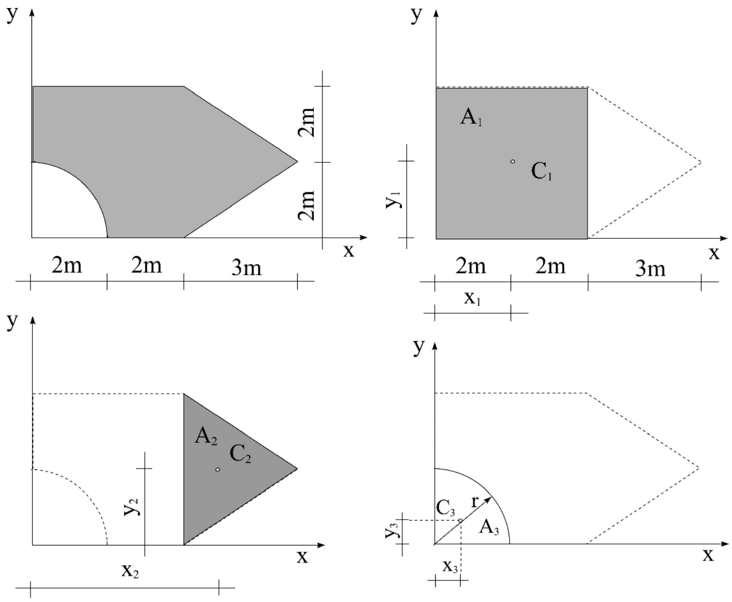
- trougao osnovice a=3m, visine h=4m

$$A_3 = \frac{a\cdot h}{2} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6\text{m}^2, \quad y_3 = \frac{h}{3} = \frac{4}{3}\text{m}.$$

Koordinata y_C težišta složene površine je:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{3.11\cdot 16.075 + \frac{4}{3}\cdot 6 + \frac{4}{3}\cdot 6}{16.075 + 6 + 6} = 2.35\text{m}.$$

8. Analitičkim putem odrediti koordinate težišta date površine.



Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- kvadrat stranice a=4m

$$A_1 = a \cdot a = 4 \cdot 4 = 16\mathrm{m}^2, \quad x_1 = \frac{a}{2} = 2\mathrm{m}, \quad y_1 = \frac{a}{2} = 2\mathrm{m},$$

- trougao osnovice a=4m, visine h=3m

$$A_2 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\mathrm{m}^2, \quad x_2 = 4 + \frac{h}{3} = 4 + \frac{3}{3} = 5\mathrm{m}, \quad y_2 = \frac{a}{2} = \frac{4}{2} = 2\mathrm{m},$$

- četvrtina kruga poluprečnika r=2m

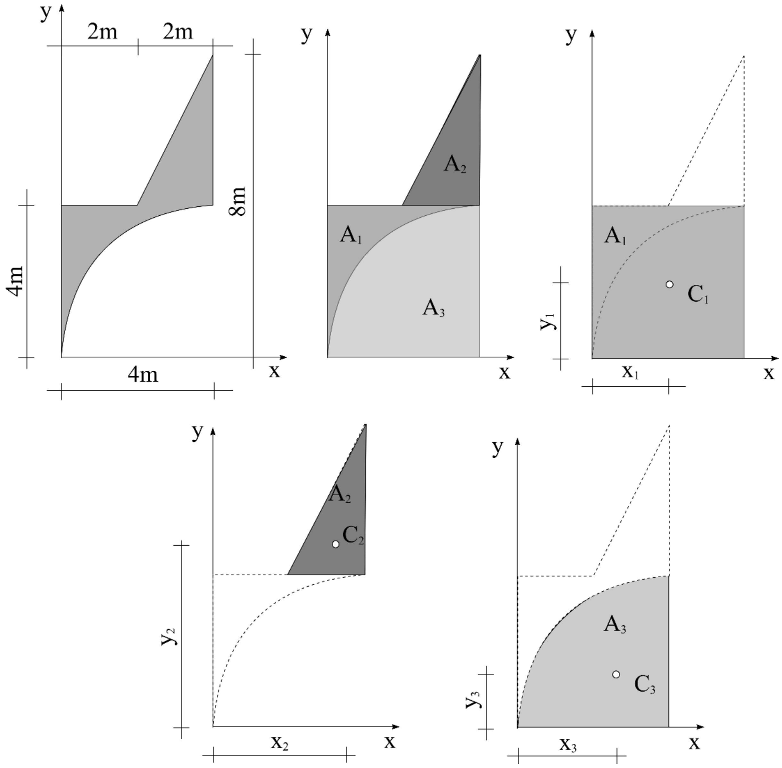
$$A_3 = \frac{r^2 \pi}{4} = \frac{2^2 \pi}{4} = \pi = 3.14\mathrm{m}^2, \quad x_3 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 2}{3\pi} = 0.85\mathrm{m}, \quad y_3 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 2}{3\pi} = 0.85\mathrm{m}.$$

Koordinate težišta složene površine su:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 - x_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{2 \cdot 16 + 5 \cdot 6 - 0.85 \cdot 3.14}{16 + 6 - 3.14} = 3.15\mathrm{m},$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 - y_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{2 \cdot 16 + 2 \cdot 6 - 0.85 \cdot 3.14}{16 + 6 - 3.14} = 2.2\mathrm{m}.$$

9. Analitičkim putem odrediti težište šrafirane površine.



Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- kvadrat stranice a=4m

$$A_1 = a \cdot a = 4 \cdot 4 = 16\text{m}^2, \quad x_1 = \frac{a}{2} = 2\text{m}, \quad y_1 = \frac{a}{2} = 2\text{m},$$

- trougao osnovice a=2m, visine h=4m

$$A_2 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\text{m}^2, \quad x_2 = 4 - \frac{a}{3} = 4 - \frac{2}{3} = 3.33\text{m}, \quad y_2 = 4 + \frac{h}{3} = 4 + \frac{8}{3} = 6.667\text{m},$$

- četvrtina kruga poluprečnika r=4m

$$A_3 = \frac{r^2 \pi}{4} = \frac{4^2 \pi}{4} = 4\pi = 12.56\text{m}^2, \quad x_3 = 4 - \frac{4r}{3\pi} = 4 - \frac{4 \cdot 4}{3\pi} = 2.3\text{m}, \quad y_3 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 4}{3\pi} = 1.7\text{m}.$$

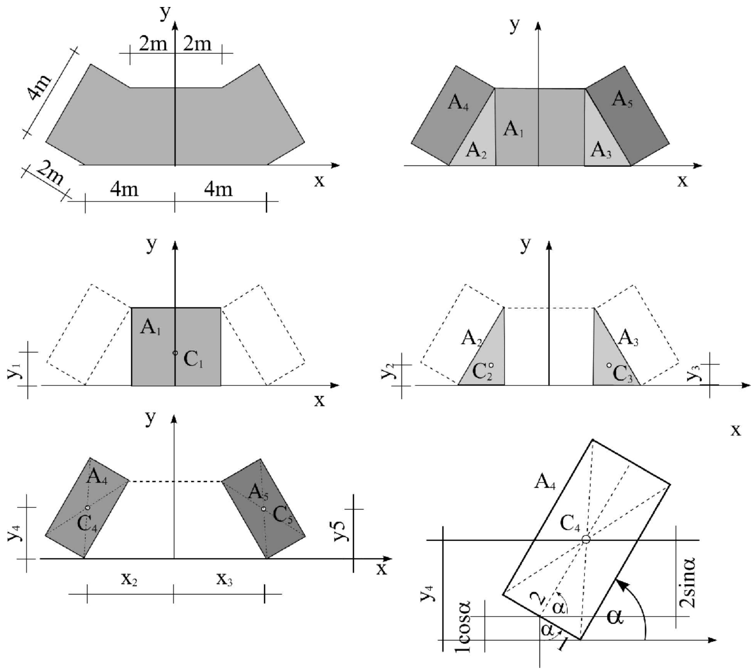
Koordinate težišta složene površine su:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 - x_3A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{2\cdot16 + 3.33\cdot4 - 2.3\cdot12.56}{16+4-12.56} = 2.21\text{m},$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 - y_3A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{2\cdot16 + 6.667\cdot4 - 1.70\cdot12.56}{16+4-12.56} = 5.02\text{m}.$$

Težište složene površine je tačka C (2.21m, 5.02m).

10. Odrediti koordinatu y_C težišta date površine analitičkim putem.



Složena površina je simetrična u odnosu na osu y. Težište se nalazi na osi simetrije, tj. $x_C=0$, pa je potrebno odrediti samo koordinatu y_C težišta. Delovi složene površine su pravougaonik A_1, dva trougla istih površina A_2 i A_3, simetrična u odnosu na y osu i dva pravougaonika istih površina A_4 i A_5, koji su takođe simetrični u odnosu na y osu i pod uglom su α u odnosu na nju. Sa slike sledi:

$$\cos\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60°,$$

pa je visina trouglova $h = d\sin 60^0 = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\text{m}$, gde je sa d označena hipotenuza trougla.

Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- pravougaonik stranica a=4m, $b = h = 2\sqrt{3}\text{m}$

$$A_1 = a \cdot h = 4 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} = 13.86\text{m}^2, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{h}{2} = \sqrt{3}\text{m},$$

- dva trougla osnovica a=2m, visina $h = 2\sqrt{3}\text{m}$

$$A_2 = A_3 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = 3.46\text{m}^2, \quad y_2 = y_3 = \frac{h}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.155\text{m},$$

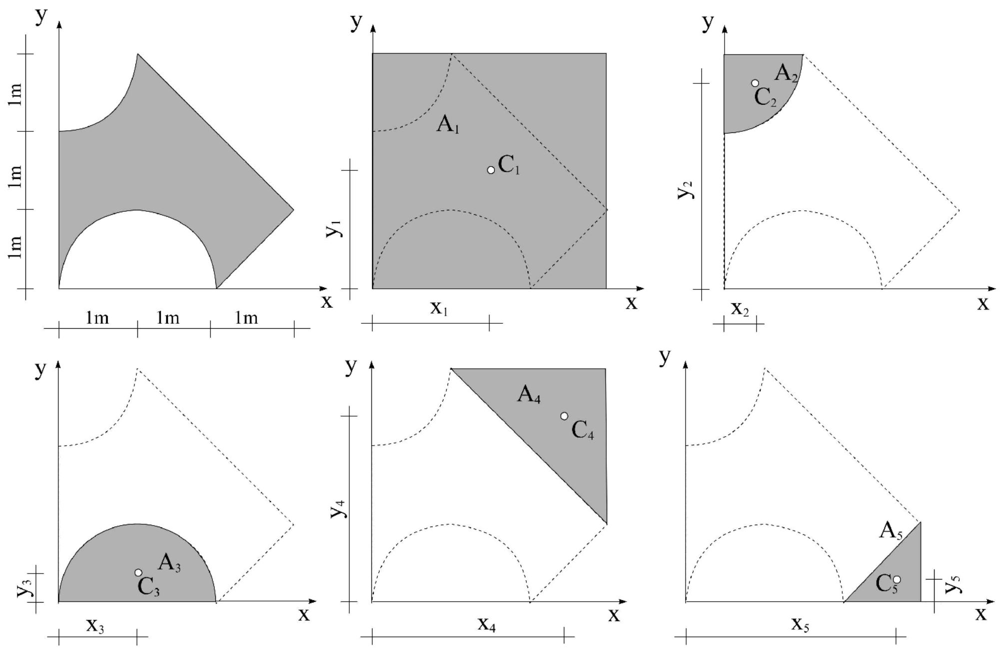
- dva pravougaonika stranica a=4m, b=2m

$$A_4 = A_5 = 4 \cdot 2 = 8\text{m}^2, \quad y_4 = y_5 = 1 \cdot \cos\alpha + 2 \cdot \sin\alpha = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.23\text{m}.$$

Težište y_C složene površine je:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i} = \frac{y_1 A_1 + 2y_2 A_2 + 2y_4 A_4}{A_1 + 2A_2 + 2A_4} = \frac{1.73 \cdot 13.86 + 1.155 \cdot 2 \cdot 3.46 + 2.23 \cdot 2 \cdot 8}{13.86 + 2 \cdot 3.46 + 2 \cdot 8} = 1.84\text{m}.$$

11. Odrediti analitičkim putem težište šrafirane površine.



Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- kvadrat stranice a=3m

$$A_1 = a \cdot a = 3 \cdot 3 = 9\text{m}^2, \quad x_1 = \frac{a}{2} = 1.5\text{m}, \quad y_1 = \frac{a}{2} = 1.5\text{m},$$

- četvrtina kruga poluprečnika r=1m

$$A_2 = \frac{r^2 \pi}{4} = \frac{1^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4} = 0.78\text{m}^2, \quad x_2 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot 1}{3\pi} = 0.42\text{m}, \quad y_2 = 3 - \frac{4r}{3\pi} = 3 - \frac{4 \cdot 1}{3\pi} = 2.58\text{m},$$

- polovina kruga poluprečnika r=1m

$$A_3 = \frac{r^2\pi}{2} = \frac{1^2\pi}{2} = 1.57m^2, \quad x_3 = 1m, \quad y_3 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4\cdot 1}{3\pi} = 0.42m,$$

- trougao osnovice a=2m, visine h=2m

$$A_4 = \frac{a\cdot h}{2} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2m^2, \quad x_4 = 3 - \frac{a}{3} = 3 - \frac{2}{3} = 2.33m, \quad y_4 = 3 - \frac{h}{3} = 3 - \frac{2}{3} = 2.33m,$$

- trougao osnovice a=1m, visine h=1m

$$A_5 = \frac{a\cdot h}{2} = \frac{1\cdot 1}{2} = 0.5m^2, \quad x_5 = 3 - \frac{a}{3} = 3 - \frac{1}{3} = 2.67m, \quad y_5 = \frac{h}{3} = \frac{1}{3} = 0.33m.$$

Koordinate težišta složene površine su:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i} = \frac{x_1A_1 - x_2A_2 - x_3A_3 - x_4A_4 - x_5A_5}{A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5},$$

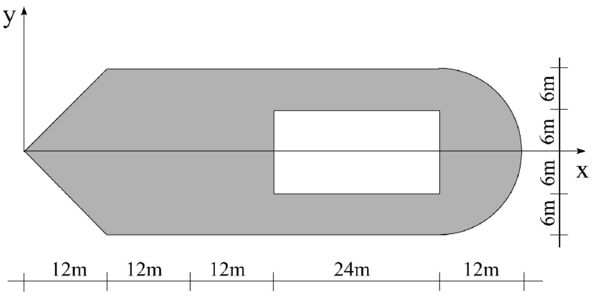
$$x_C = \frac{1.5\cdot 9 - 0.42\cdot 0.78 - 1\cdot 1.57 - 2.33\cdot 2 - 2.67\cdot 0.5}{9 - 0.78 - 1.57 - 2 - 0.5} = 1.35m,$$

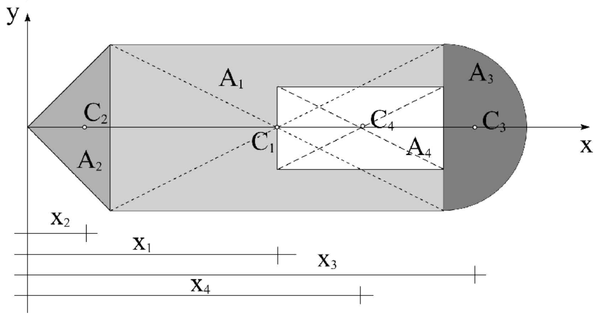
$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i} = \frac{y_1A_1 - y_2A_2 - y_3A_3 - y_4A_4 - y_5A_5}{A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5},$$

$$y_C = \frac{1.5\cdot 9 - 2.58\cdot 0.78 - 0.42\cdot 1.57 - 2.33\cdot 2 - 0.33\cdot 0.5}{9 - 0.78 - 1.57 - 2 - 0.5} = 1.45m.$$

Težište složene površine je tačka C (1.35m, 1.45m).

12. Odrediti težište šrafirane površine.





Površina je simetrična u odnosu na x osu pa se težište nalazi na toj osi ($y_C=0$). Treba izračunati udaljenje težišta od ose y. Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površi su:

- pravougaonik stranica a=48m, b=24m

$$A_1 = a \cdot b = 48 \cdot 24 = 1152 m^2, \quad x_1 = 12 + \frac{a}{2} = 12 + \frac{48}{2} = 36m, \quad y_2 = 0,$$

- trougao osnovice a=24m, visine h=12m

$$A_2 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{24 \cdot 12}{2} = 144 m^2, \quad x_2 = 12 - \frac{h}{3} = 12 - \frac{12}{3} = 8m, \quad y_2 = 0,$$

- polovina kruga poluprečnika r=12m

$$A_3 = \frac{r^2 \pi}{2} = \frac{12^2 \pi}{2} = 228.08 m^2, \quad x_3 = 60 + \frac{4r}{3\pi} = 60 + \frac{4 \cdot 12}{3\pi} = 65.1m, \quad y_3 = 0,$$

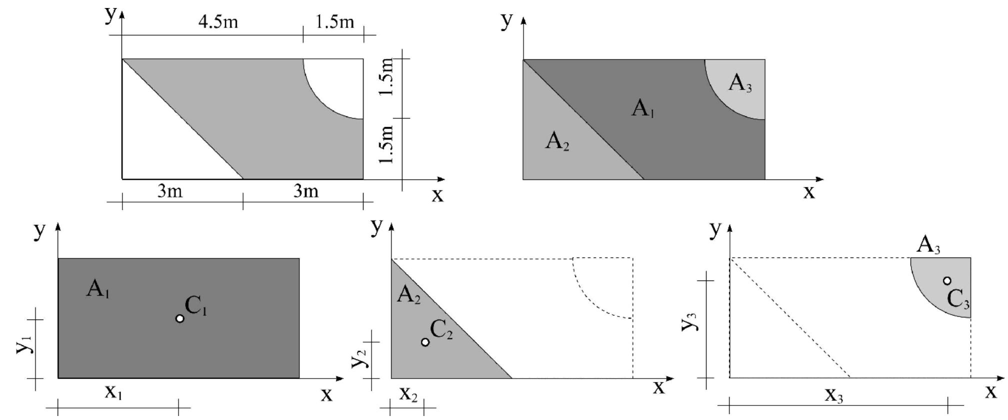
- pravougaonik stranica a=24m, b=12m

$$A_4 = a \cdot b = 24 \cdot 12 = 288 m^2, \quad x_4 = 36 + \frac{a}{2} = 36 + \frac{24}{2} = 48m, \quad y_4 = 0.$$

Koordinata x_C težišta složene površine je:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{4} A_i} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 - x_4A_4}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4} = \frac{36 \cdot 1152 + 8 \cdot 144 + 65.1 \cdot 226.08 - 48 \cdot 288}{1152 + 144 + 226.08 - 288} = 35.26m.$$

13. Analitičkim putem odrediti težište date površine.



Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- pravougaonik stranica a=6m, b=3m

$$A_1 = a \cdot b = 6 \cdot 3 = 18\text{m}^2, \quad x_1 = \frac{a}{2} = \frac{6}{2} = 3\text{m}, \quad y_1 = \frac{b}{2} = \frac{3}{2} = 1.5\text{m},$$

- trougao osnovice a=3m, visine h=3m

$$A_2 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4.5\text{m}^2, \quad x_2 = \frac{a}{3} = \frac{3}{3} = 1\text{m}, \quad y_2 = \frac{h}{3} = \frac{3}{3} = 1\text{m},$$

- četvrtina kruga poluprečnika r=1.5m

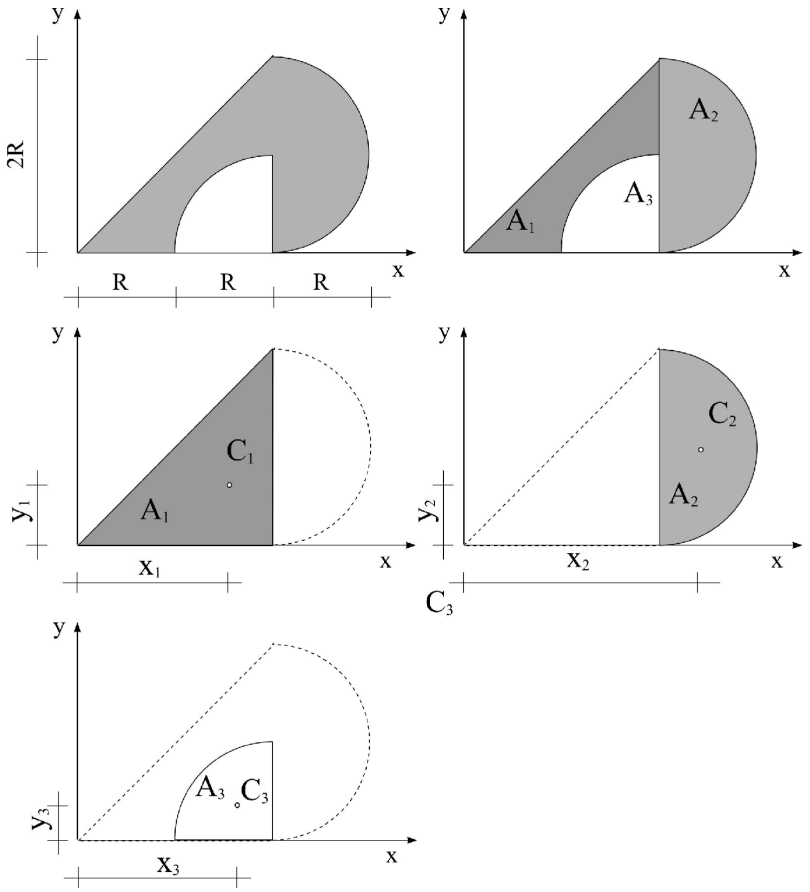
$$A_3 = \frac{r^2\pi}{4} = \frac{1.5^2\pi}{4} = 1.77\text{m}^2, \quad x_3 = 6 - \frac{4r}{3\pi} = 6 - \frac{4 \cdot 1.5}{3\pi} = 5.36\text{m}, \quad y_3 = 3 - \frac{4r}{3\pi} = 3 - \frac{4 \cdot 1.5}{3\pi} = 2.36\text{m}.$$

Koordinate težišta složene površine su:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{x_1A_1 - x_2A_2 - x_3A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{3 \cdot 18 - 1 \cdot 4.5 - 5.36 \cdot 1.77}{18 - 4.5 - 1.77} = 3.41\text{m},$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{y_1A_1 - y_2A_2 - y_3A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{1.5 \cdot 18 - 1 \cdot 4.5 - 2.36 \cdot 1.77}{18 - 4.5 - 1.77} = 1.56\text{m}.$$

14. Odrediti težište šrafirane površine analitičkim putem. R=10m



Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- trougao osnovice a=2R=20m, visine h=2R=20m

$$A_1 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{2R \cdot 2R}{2} = \frac{4R^2}{2} = 2 \cdot 10^2 = 200m^2,$$

$$x_1 = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}2R = \frac{2}{3}20 = 13.33m, \quad y_1 = \frac{h}{3} = \frac{2R}{3} = \frac{20}{3} = 6.67m,$$

- polovina kruga poluprečnika R=10m

$$A_2 = \frac{R^2 \pi}{2} = 1.57R^2 = 1.57 \cdot 10^2 = 157m^2,$$

$$x_2 = 2R + \frac{4R}{3\pi} = 2R + 0.43R = 2.42R = 2.42 \cdot 10 = 24.2m, \quad y_2 = R = 10m,$$

- četvrtina kruga poluprečnika R=10m

$$A_3 = \frac{R^2\pi}{4} = 0.785R^2 = 78.5m^2,$$

$$x_3 = 2R - \frac{4R}{3\pi} = 2R - 0.43R = 1.57R = 15.7m, \quad y_3 = \frac{4R}{3\pi} = 0.43R = 4.3m.$$

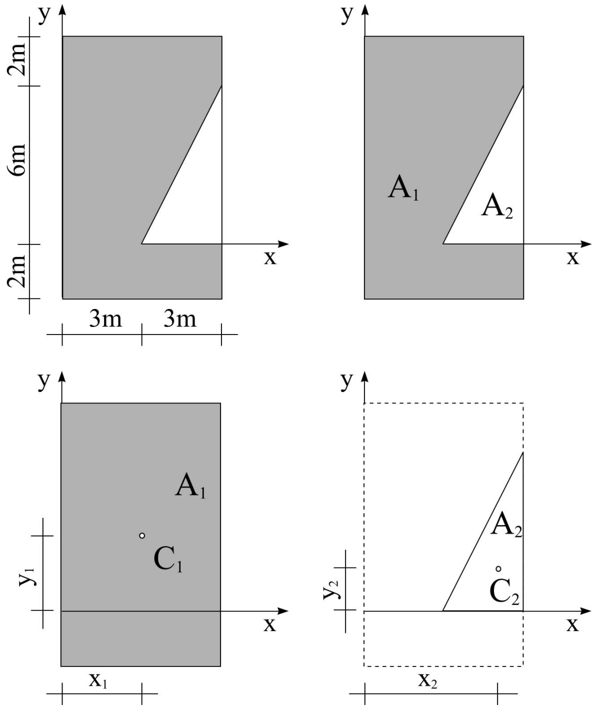
Koordinate težišta složene površine su:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 - x_3A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{13.33\cdot 200 + 24.2\cdot 157 - 15.7\cdot 78.5}{200 + 157 - 78.5} = 18.85m,$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 - y_3A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{6.67\cdot 200 + 10\cdot 157 - 4.3\cdot 78.5}{200 + 157 - 337.55} = 9.21m.$$

Težište složene površine je tačka C (18.85m, 9.21m).

15. Analitičkim putem odrediti položaj težišta šrafirane površine.



Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- pravougaonik stranica a=6m, b=10m

$$A_1 = a \cdot b = 6 \cdot 10 = 60\text{m}^2, \quad x_1 = \frac{a}{2} = \frac{6}{2} = 3\text{m}, \quad y_1 = \frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5\text{m},$$

- trougao osnovice a=3m, visine h=6m

$$A_2 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9\text{m}^2, \quad x_2 = 6 - \frac{a}{3} = 6 - \frac{3}{3} = 5\text{m}, \quad y_2 = \frac{h}{3} = \frac{6}{3} = 2\text{m}.$$

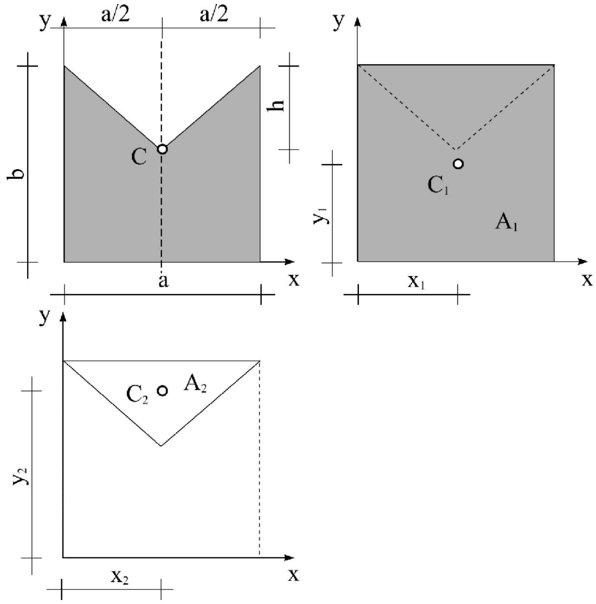
Koordinate težišta složene površine su:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{3 \cdot 60 - 5 \cdot 9}{60 - 9} = 2.65\text{m},$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{3 \cdot 60 - 2 \cdot 9}{60 - 9} = 3.18\text{m}.$$

Težište složene površine je tačka C (2.65m, 3.18m).

16. Odrediti visinu h tako da težište šrafirane površine bude u tački C.



Složena površina ima jednu osu simetrije, koja je paralelna sa y osom i nalazi se na rastojanju $x = \frac{a}{2}$ od nje. Težište se nalazi na osi simetrije pa je potrebno odrediti samo koordinatu y_C težišta.

Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- pravougaonik stranica a, b

$$A_1 = a \cdot b, \quad x_1 = \frac{a}{2}, \quad y_1 = \frac{b}{2},$$

- trougao osnovice a, visine h

$$A_2 = \frac{a \cdot h}{2}, \quad x_2 = \frac{a}{2}, \quad y_2 = \frac{h}{3}.$$

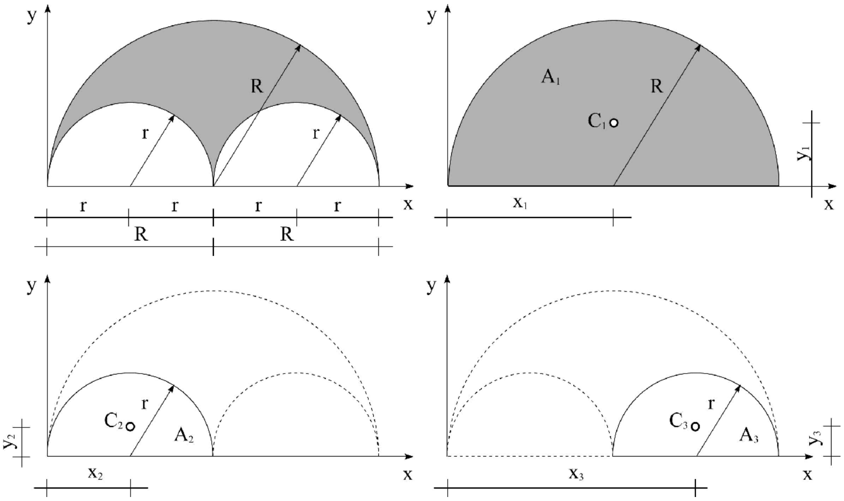
Koordinate tačke C su, kao što se sa slike vidi, $x_C = \frac{a}{2}$ i $y_C = b - h$, pa se izjedanačavanjem izraza za težište u y pravcu i koordinate y_C dobija tražena veličina h:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{\frac{b}{2} \cdot ab - \left(b - \frac{h}{3}\right) \cdot \frac{ah}{2}}{ab - \frac{ah}{2}} = b - h,$$

$$\frac{2}{3} h^2 - 2bh + b^2 = 0 \Rightarrow h_{1,2} = \frac{3b \pm b\sqrt{3}}{2}, \quad h_1 = 2.37b, \quad h_2 = 0.63b.$$

Sa slike je očigledno da je prvo rešenje nerealno, pa se zaključuje da je h=0.63b.

17. Za datu ravnu površinu analitičkim putem odrediti koordinate težišta.



Složena površina ima jednu osu simetrije, koja je paralelna sa y osom i nalazi se na rastojanju $x = R$ od nje. Težište se nalazi na osi simetrije pa je potrebno odrediti samo koordinatu y_C težišta. Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- polovina kruga poluprečnika R

$$A_1 = \frac{R^2 \pi}{2} = 1.57R^2, \quad x_1 = R, \quad y_1 = \frac{4R}{3\pi} = 0.42R,$$

- polovina kruga poluprečnika r

$$A_2 = \frac{r^2 \pi}{2} = \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \pi}{2} = 0.39R^2, \quad x_2 = r = \frac{R}{2}, \quad y_2 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot \frac{R}{2}}{3\pi} = 0.21R,$$

- polovina kruga poluprečnika r

$$A_3 = \frac{r^2 \pi}{2} = \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \pi}{2} = 0.39R^2, \quad x_3 = 2r + r = R + \frac{R}{2} = 1.5R, \quad y_3 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \cdot \frac{R}{2}}{3\pi} = 0.21R.$$

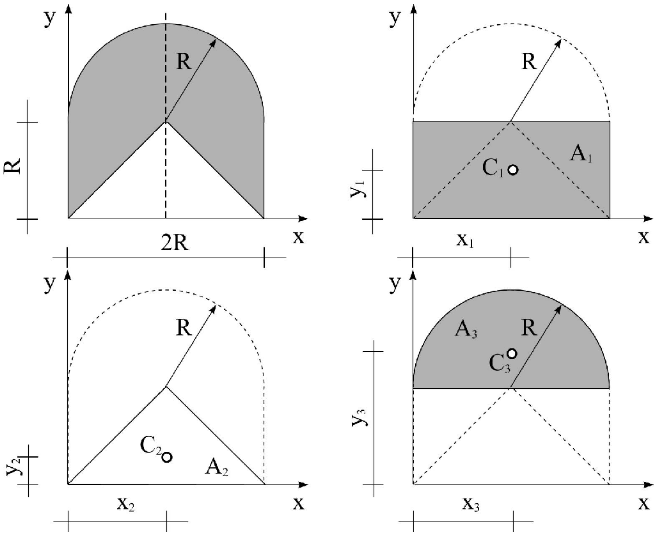
Koordinate težišta složene površine su:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2 - x_3 A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{R \cdot 1.57R^2 - 0.50R \cdot 0.39R^2 - 1.5R \cdot 0.39R^2}{1.57R^2 - 0.39R^2 - 0.39R^2} = R,$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2 - y_3 A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{0.42R \cdot 1.57R^2 - 0.21R \cdot 0.39R^2 - 0.21R \cdot 039R^2}{1.57R^2 - 0.39R^2 - 0.39R^2} = 0.63R.$$

Težište složene površine je tačka C (R, 0.63R).

18. Analitičkim putem odrediti težište šrafirane ravne površine.



Složena površina ima jednu osu simetrije, koja je paralelna sa y osom i nalazi se na rastojanju $x = R$ od nje. Težište se nalazi na osi simetrije, tj. $x_C=R$.

Površine i koordinate težišta pojedinih delova složene površine su:

- pravougaonik stranica a=2R, b=R

$$A_1 = a \cdot b = 2R \cdot R = 2R^2, \quad x_1 = R, \quad y_1 = \frac{b}{2} = \frac{R}{2},$$

- trougao osnovice a=2R, visine h=R

$$A_2 = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{2R \cdot R}{2} = R^2, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{h}{3} = \frac{R}{3},$$

- polovina kruga poluprečnika R

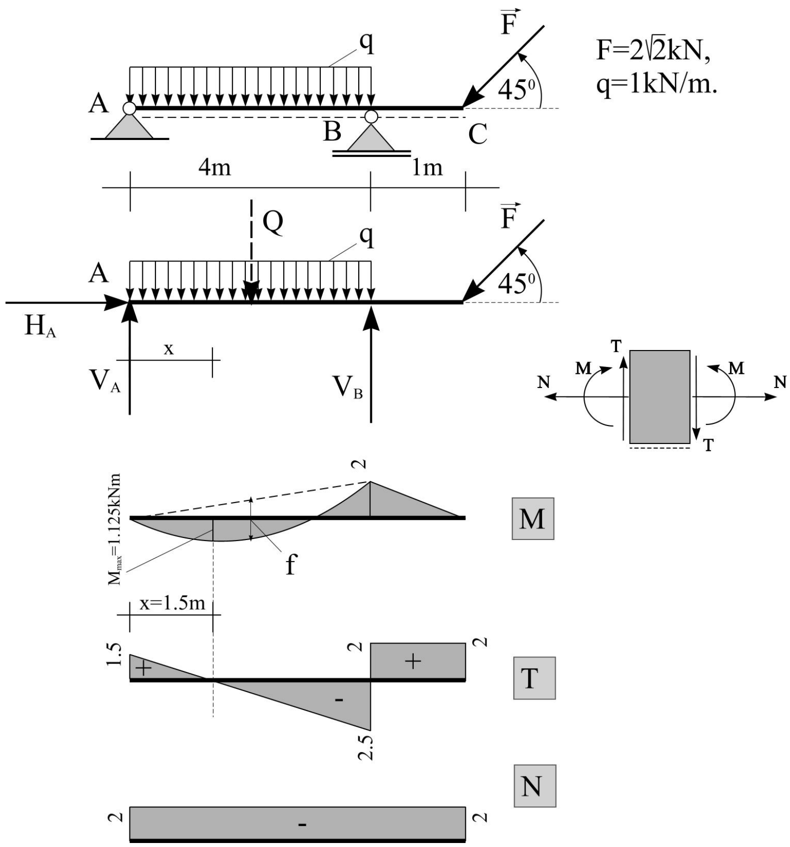
$$A_3 = \frac{R^2 \pi}{2} = 1.57R^2, \quad x_3 = 0, \quad y_3 = R + \frac{4R}{3\pi} = 1 + 0.42R = 1.42R.$$

Koordinata y_C težišta složene površine je:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 - A_2 + A_3} = \frac{\frac{R}{2} \cdot 2R^2 - \frac{R}{3} \cdot R^2 + 1.42R \cdot 1.57R^2}{2R^2 - R^2 + 1.57R^2} = 1.13R.$$

SILE U PRESECIMA GREDNIH NOSAČA

1. Za datu gredu i opterećenje odrediti:
- reakcije oslonaca;
- dijagrame sila u presecima M, T i N;
- položaj i veličinu maksimalnog momenta savijanja.



Na gredu sa prepustom, dimenzija i oslanjanja kao na slici, deluju koncentrisana sila u preseku C i raspodeljeno opterećenje čija je rezultanta:

$Q = q \cdot l = 1 \cdot 4 = 4\,kN.$

Reakcije veza se određuju iz jednačina ravnoteže i one su:

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A - F\cos 45^0 = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - F\sin 45^0 - Q = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 4 - Q \cdot 2 - F\sin 45^0 \cdot 5 = 0. \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow H_A = 2\,kN, \quad (3) \Rightarrow V_B = 4.5\,kN, \quad (2) \Rightarrow V_A = 1.5\,kN.$$

Vrednosti momenata savijanja u presecima A i C su jednaki nuli, dok je vrednost momenta savijanja u preseku B:

$$M_B = -F\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = -4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = -2kNm.$$

Na delu BC raspodela momenata savijanja je linearna, dok je na delu AB raspodela momenata savijanja u obliku kvadratne parabole. Strela kvadratne parabole, koja se pri konstruisanju dijagrama momenata nanosi na polovini raspona AB je:

$$f = \frac{q l^2}{8} = \frac{1 \cdot 4^2}{8} = 2\text{kNm}.$$

Vrednosti transverzalnih sila u presecima A i C, kao i u presecima beskonačno blizu levo i desno od preseka B su:

$$T_A = V_A = 1.5\text{kN},$$

$$T_B^l = V_A - Q = 1.5 - 4 = -2.5\text{kN},$$

$$T_B^d = V_A - Q + V_B = 1.5 - 4 + 4.5 = 2\text{kN}, \text{ ili } T_B^d = F\sin 45^0 = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\text{kN}.$$

Izraz za transverzalnu silu u proizvoljnom preseku na delu nosača AB, na rastojanju x od oslonca A je:

$$T(x) = V_A - q \cdot x = 1.5 - 1 \cdot x = 1.5 - x.$$

Transverzalna sila je, dakle, na delu AB, linearna funkcija koordinate x. Dijagram transverzalnih sila je prava i da bi se nacrtao potrebno je poznavati vrednosti transverzalnih sila u presecima T_A i T_B^l. Na prepustu vrednosti transverzalnih sila u svim presecima imaju iste vrednosti pa na tom delu dijagram transverzalnih sila ima pravougaoni oblik.

Na celoj gredi normalna sila ima konstantnu vrednost:

$$N_A = N_B^l = N_B^d = N_C = -2\text{kN},$$

što znači da je greda pritisnuta i da dijagram aksijalnih sila na gredi ima pravougaoni oblik.

Maksimalna vrednost momenta savijanja se nalazi u preseku u kome je transverzalna sila jednaka nuli (u slučaju jednakopodeljenog opterećenja), ili menja znak (presek u kome deluje koncentrisana sila). Da bi se odredilo mesto i veličina maksimalnog momenta savijanja (opasan presek) potrebno je izraz za transverzalnu silu izjednačiti sa nulom:

$$T(x) = V_A - q \cdot x = 1.5 - 1 \cdot x = 1.5 - x = 0 \Rightarrow x = 1.5\text{m}.$$

Maksimalni moment savijanja je u preseku na rastojanju x=1.5m od oslonca A. Veličina maksimalnog momenta savijanja se određuje zamenom x=1.5m u izraz za moment savijanja u proizvoljnom preseku na delu nosača AB:

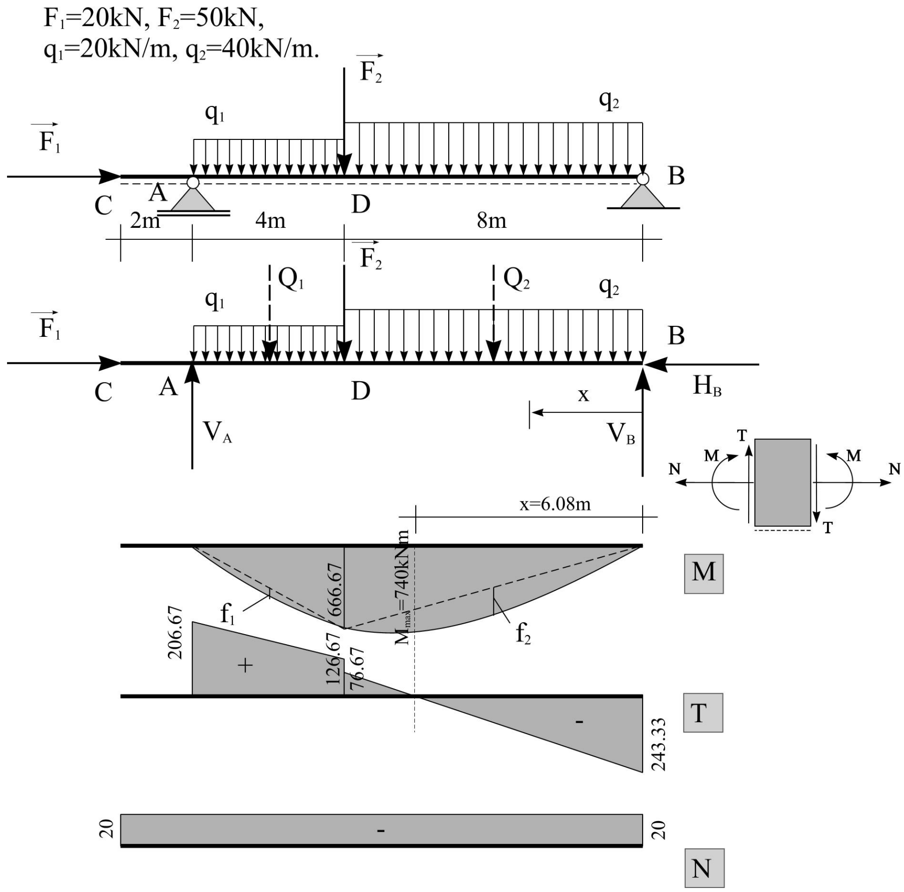
$$M(x) = V_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 1.5 \cdot x - 1\frac{x^2}{2} = 1.5x - \frac{x^2}{2},$$

$$M_{max} = M_{x=1.5m} = V_A \cdot 1.5 - q \cdot 1.5 \cdot \frac{1.5}{2} = 1.5 \cdot 1.5 - 1 \cdot 1.5 \cdot \frac{1.5}{2} = 1.125\text{kNm}.$$

Vrednost momenta savijanja nad osloncem B je 2kNm, što znači da je opasan presek u B.

2. Za datu gredu i opterećenje odrediti:

- reakcije oslonaca;
- dijagrame sila u presecima M, T i N;
- položaj i veličinu maksimalnog momenta savijanja.



Na gredu sa prepustom deluju dve koncentrisne sile u preseku C i D, kao i dva raspodeljena opterećenja čije su rezultante:

$Q_1 = q_1 \cdot l_1 = 20 \cdot 4 = 80\text{kN}, \quad Q_2 = q_2 \cdot l_2 = 40 \cdot 8 = 320\text{kN}.$

Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_B + F_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - F_2 - Q_1 - Q_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -V_A \cdot 12 + F_2 \cdot 8 + Q_1 \cdot 10 + Q_2 \cdot 4 = 0. \qquad (3)$$

Rešavanjem jednačina ravnoteže dobijaju se reakcije veza:

(1) $\Rightarrow$ $H_B = 20kN$,

(3) $\Rightarrow$ $V_A = 206.67\,kN$,

(2) $\Rightarrow$ $V_B = 243.33\,kN$.

Vrednosti momenata savijanja u presecima B, i C su jednaki nuli, a takođe i u preseku A jer levo od preseka nema sila koje imaju projekciju upravnu na osu nosača, dok je vrednost momenta savijanja u preseku D:

$$M_D = V_A \cdot 4 - Q_1 \cdot 2 = 206.67 \cdot 4 - 80 \cdot 4 = 666.67kNm.$$

U poljima AD i DB je parabolična raspodela momenata savijanja. Strele ovih parabola su:

$$f_1 = \frac{q_1 l_1^2}{8} = \frac{20 \cdot 4^2}{8} = 40kNm,$$

$$f_2 = \frac{q_2 l_2^2}{8} = \frac{40 \cdot 8^2}{8} = 320kNm.$$

Transverzalne sile na delu CA su jednake nuli, dok su vrednosti transverzalnih sila u presecima beskonačno blizu desno od preseka A, beskonačno blizu levo i desno od preseka D, kao i u B:

$$T_A^d = V_A = 206.67kN,$$

$$T_D^l = V_A - Q_1 = 206.67 - 80 = 126.67kN,$$

$$T_D^d = V_A - Q_1 - F_1 = 206.67 - 80 - 50 = 76.67kN,$$

$$T_B = -V_B = -243.33kN.$$

Raspodela trensverzalnih sila u poljima AD i DB je linearna, a opasan presek treba očekivati u polju BD na mestu gde je transverzalna sila jednaka nuli. Da bi se odredilo mesto maksimalnog momenta treba napisati izraz za transverzalnu silu u funkciji koordinate x, koja je u ovom zadatku definisana od tačke B, i izjednačiti ga sa nulom:

$$T(x) = V_B - q_2 \cdot x = 0,$$

$$243.33 - 40 \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6.08m.$$

Izraz za moment savijanja na delu BD u funkciji promenljive x glasi:

$$M(x) = V_B \cdot x - q_2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 243.33x - 20\frac{x^2}{2}.$$

Maksimalni moment savijanja je u preseku na rastojanju x=6.08m:

$$M_{max} = M_{x=6.08m} = 243.33 \cdot 6.08 - 40 \cdot 6.08 \cdot \frac{6.08}{2} = 740kNm.$$

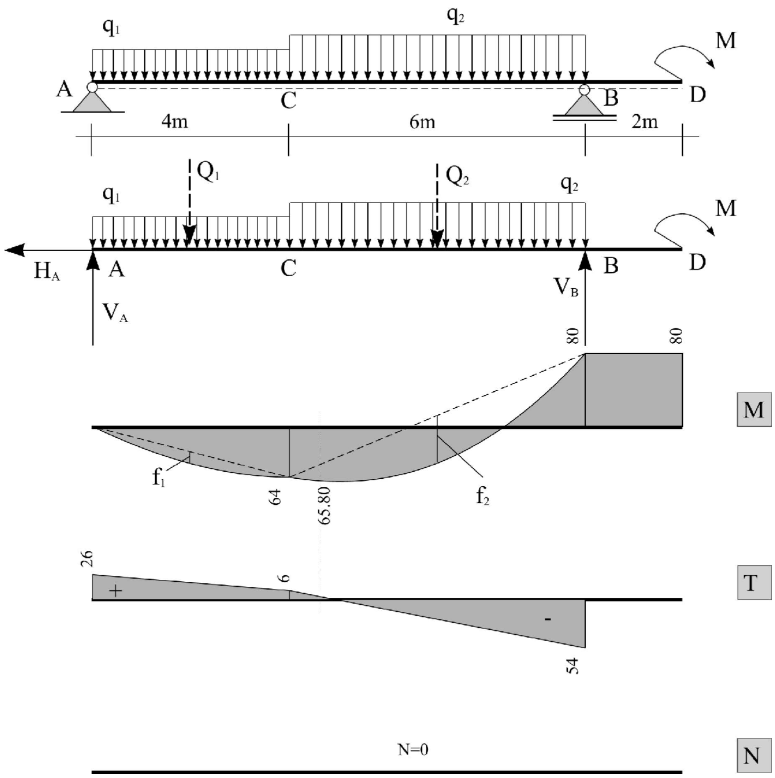
U svim presecima grede normalna sila ima istu vrednost:

$$N_C = N_A^l = N_A^d = N_D^l = N_D^d = N_B^l = -20kN,$$

pa je dijagram normalnih sila u obliku pravougaonika.

3. Za datu gredu sa prepustom i opterećenjem odrediti reakcije oslonaca i dijagrame sila u presecima M, T i N.

$M=80kNm$, $q_1=5kN/m$, $q_2=10kN/m$.



Rezultante kontinualnih opterećenja su:

$Q_1 = q_1 \cdot l_1 = 5 \cdot 4 = 20\,kN$,

$Q_2 = q_2 \cdot l_2 = 10 \cdot 6 = 60\,kN$.

Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_A = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - Q_1 - Q_2 = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 10 - Q_1 \cdot 2 - Q_2 \cdot 7 - M = 0. \qquad (3)$$

Reakcije veza su:

(1) $\Rightarrow$ $H_A = 0\,kN$, (3) $\Rightarrow$ $V_B = 54\,kN$, (2) $\Rightarrow$ $V_A = 26\,kN$.

Raspodele momenata savijanja na delovima AC i CB su u obliku parabola drugog reda. Strele parabola su:

$$f_1 = \frac{q_1 l_1^2}{8} = \frac{5 \cdot 4^2}{8} = 10kNm, \quad f_2 = \frac{q_2 l_2^2}{8} = \frac{10 \cdot 6^2}{8} = 45kNm.$$

Vrednosti momenata savijanja u karakterističnim presecima su:

$M_A = 0,$

$M_C = V_A \cdot 4 - Q_1 \cdot 2 = 26 \cdot 4 - 20 \cdot 2 = 64\text{kNm},$

$M_B = -M = -80\text{kNm},$

$M_D = -M = -80\text{kNm}.$

Vrednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

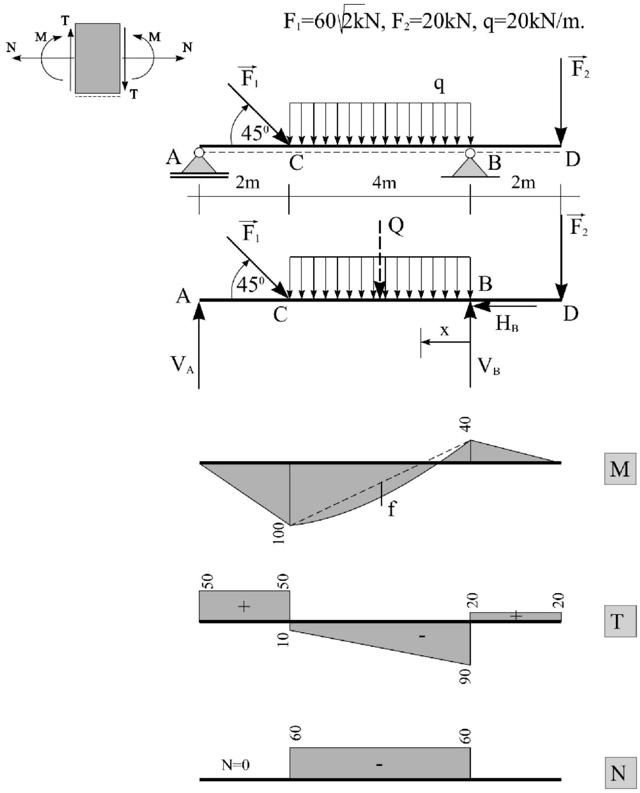
$T_A^d = V_A = 26\text{kN}, \quad T_C = V_A - Q_1 = 6\text{kN},$

$T_B^l = V_A - Q_1 - Q_2 = 26 - 20 - 60 = -54\text{kN},$

$T_B^d = 0, \quad T_D = 0.$

Normalne sile u svim presecima su jednake nuli jer nema podužnih sila na nosaču.

4. Za dati nosač i opterećenje odrediti dijagrame sila u presecima, kao i mesto i veličinu maksimalnog momenta savijanja.



Rezultanta kontinualnog opterećenja je:

$Q = q \cdot l = 20 \cdot 4 = 80\,\text{kN}.$

Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_B + F_1 \cos 45° = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - F_1 \sin 45° - F_2 - Q = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 6 - Q \cdot 4 - F_1 \sin 45° \cdot 2 - F_2 \cdot 8 = 0, \qquad (3)$$

a reakcije veza su:

(1) $\Rightarrow$ $H_B = 60\,kN$,

(3) $\Rightarrow$ $V_B = 110\,kN$,

(2) $\Rightarrow$ $V_A = 50\,kN$.

Vrednosti momenata savijanja u karakterističnim presecima su:

$M_A = 0$,

$M_C = V_A \cdot 2 = 50 \cdot 2 = 100kNm$,

$M_B = -F_2 \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40kNm$,

$M_D = 0$.

Raspodela momenata savijanja na delu CB je u obliku parabole drugog reda. Strela parabole je:

$$f = \frac{q l^2}{8} = \frac{20 \cdot 4^2}{8} = 40kNm.$$

Vrednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

$T_A = V_A = 50kN$,

$T_C^l = V_A = 50kN$, $\quad T_C^d = V_A - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 50 - 60\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -10kN$,

$T_B^l = V_A - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - Q = 50 - 60\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - 80 = -90kN$, $\quad T_B^d = F_2 = 20kN$,

$T_D = F_2 = 20kN$.

Vrednosti normalnih sila u karakterističnim presecima su:

$N_A = 0$,

$N_C^l = 0$,

$N_C^d = -F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = -60\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -60kN$,

$N_B^l = -H_B = -60kN$,

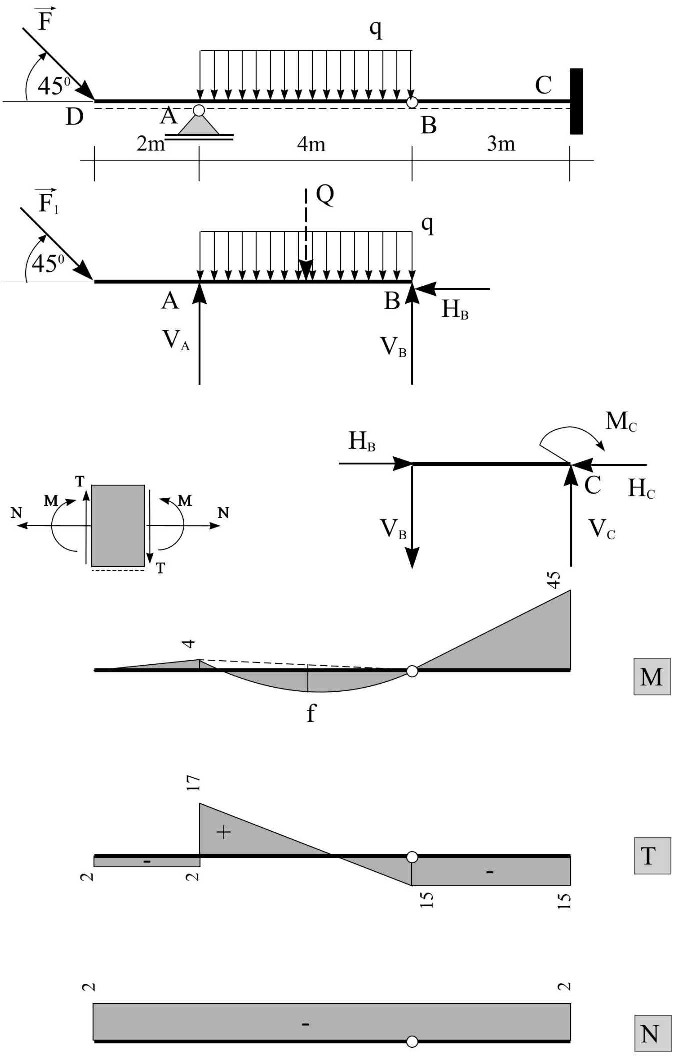
$N_B^d = 0$.

Maksimalna vrednost momenta savijanja se nalazi u preseku u kome je transverzalna sila jednaka nuli (u slučaju jednakopodeljenog opterećenja), ili menja znak (presek u kome deluje koncentrisana sila). Maksimalni moment je u preseku C, što je očigledno sa dijagrama momenata savijanja i njegova vrednost je M_{max}=100kNm.

5. Za dati sistem i opterećenje odrediti:

- sile veze i reakcije oslonaca;
- dijagrame M, T i N sila u presecima.

$F_1=2\sqrt{2}kN$, q=8kN/m.



Gerberov nosač prikazan na slici je na desnom kraju uklješten. Da bi se odredile reakcije unutrašnjih i spoljašnjih veza treba se osloboditi veza čime se vrši dekompozicija sistema na dva tela.

Rezultanta kontinualnog opterećenja je $Q= q\cdot l=8\cdot 4=32kN$.

Jednačine ravnoteže prvog tela glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_B + F\cos 45^o = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - F\sin 45^o - Q = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -V_A \cdot 4 + Q \cdot 2 + F\sin 45^o \cdot 6 = 0. \qquad (3)$$

Jednačine ravnoteže drugog tela su:

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_B - H_C = 0, \qquad (4)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_C - V_B = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow V_B \cdot 3 - M_C = 0. \qquad (6)$$

Reakcije veza su:

$$(1) \Rightarrow H_B = 2\,\mathrm{kN}, \quad (3) \Rightarrow V_A = 19\,\mathrm{kN}, \quad (2) \Rightarrow V_B = 15\,\mathrm{kN},$$

$$(4) \Rightarrow H_C = 2\,\mathrm{kN}, \quad (5) \Rightarrow V_C = 15\,\mathrm{kN}, \quad (6) \Rightarrow M_C = 45\,\mathrm{kNm}.$$

Vrednosti momenata savijanja u karakterističnim presecima su:

$$M_D = 0, \quad M_B = 0,$$

$$M_A = -F\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = -2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = -4\mathrm{kNm},$$

$$M_C = -45\mathrm{kNm}.$$

Raspodela momenata savijanja na delu AB je u obliku parabole drugog reda. Strela parabole je:

$$f = \frac{q\,l^2}{8} = \frac{8 \cdot 4^2}{8} = 16\mathrm{kNm}.$$

Vrednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

$$T_D = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\mathrm{kN},$$

$$T_A^l = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\mathrm{kN}, \quad T_A^d = V_A - F\frac{\sqrt{2}}{2} = 19 - 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 17\mathrm{kN},$$

$$T_B^l = -V_B = -15\mathrm{kN}, \quad T_B^d = -V_B = -15\mathrm{kN},$$

$$T_C = -V_C = -15\mathrm{kN}.$$

Vrednosti normalnih sila u karakterističnim presecima su:

$$N_D = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\mathrm{kN},$$

$$N_A^l = N_A^d = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\mathrm{kN},$$

$$N_B^l = -H_B = -2\mathrm{kN},$$

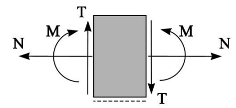
$$N_B^d = -H_B = -2\mathrm{kN},$$

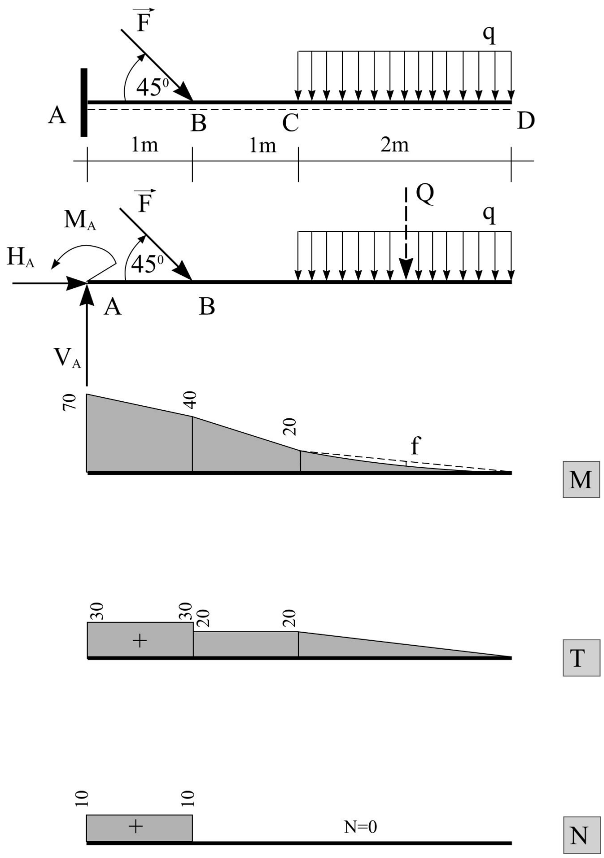
$$N_C = -H_C = -2\mathrm{kN}.$$

6. Za dati sistem i opterećenje odrediti:

- analitičkim putem reakcije oslonca,
- nacrtati dijagrame presečnih sila M, T i N.

$F_1 = 10\sqrt{2}$ kN, q=10kN/m.





Konzolni nosač je opterećen koncentrisanom silom i kontinualnim opterećenjem čija je rezultanta: $Q = q \cdot l = 10 \cdot 2 = 20$ kN.

Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A + F\cos 45^\circ = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A - F\sin 45^\circ - Q = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - Q \cdot 3 - F\sin 45^\circ \cdot 1 = 0, \qquad (3)$$

a reakcije veza su:

(1) $\Rightarrow$ $H_A = -10\,kN$,

(2) $\Rightarrow$ $V_A = 30\,kN$,

(3) $\Rightarrow$ $M_A = 70\,kNm$.

Vrednosti momenata savijanja u karakterističnim presecima su:

$M_A = -70kNm$,

$M_B = -Q \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40kNm$,

$M_C = -Q \cdot 1 = -20kNm$,

$M_D = 0$.

Raspodela momenata savijanja na delu CD je u obliku parabole drugog reda. Strela parabole je:

$$f = \frac{q\,l^2}{8} = \frac{10 \cdot 2^2}{8} = 5kNm.$$

Vrednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

$T_A = V_A = 30kN$,

$T_B^l = V_A = 30kN$,

$T_B^d = Q = 20kN$,

$T_C^l = T_C^d = Q = 20kN$,

$T_D = 0$.

Vrednosti normalnih sila u karakterističnim presecima su:

$N_A = -H_A = -(-10) = 10kN$,

$N_B^l = -H_A = -(-10) = 10kN$,

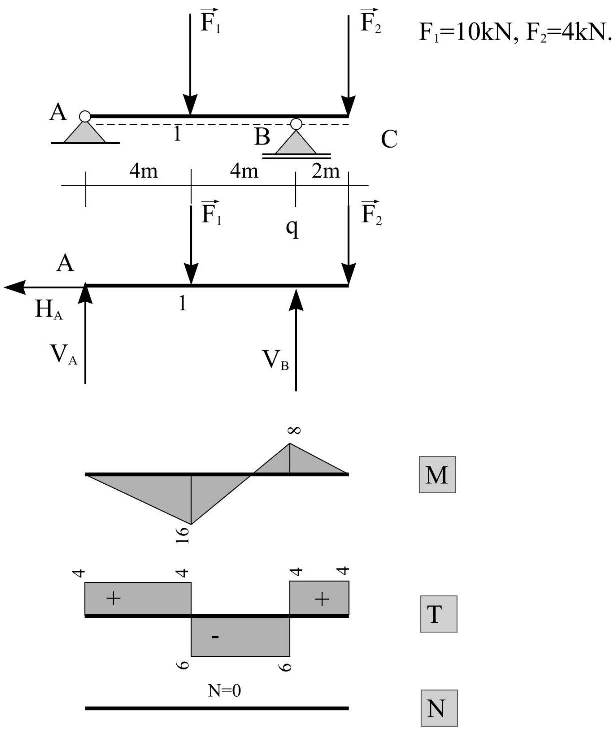
$N_B^d = 0$,

$N_C^l = N_C^d = 0$,

$N_D = 0$.

7. Za gredu opterećenu datim silama odrediti:

- analitičkim putem reakcije veze,
- nacrtati statičke dijagrame,
- odrediti maksimalni moment savijanja.



Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_A = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - F_1 - F_2 = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 8 - F_1 \cdot 4 - F_2 \cdot 10 = 0. \qquad (3)$$

Reakcije veza su:

$$(1) \quad \Rightarrow \quad H_A = 0\,\text{kN}, \quad (3) \quad \Rightarrow \quad V_B = 10\,\text{kN}, \quad (2) \quad \Rightarrow \quad V_A = 4\,\text{kN}.$$

Vrednosti momenata savijanja i transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

$$M_A = 0, \quad M_C = 0, \quad M_1 = V_A \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16\text{kNm},$$

$$M_B = -F_2 \cdot 2 = -4 \cdot 2 = -8\text{kNm},$$

$$T_A = V_A = 4\text{kN}, \quad T_1^l = V_A = 4\text{kN}, \quad T_1^d = V_A - F_1 = 4 - 10 = -6\text{kN},$$

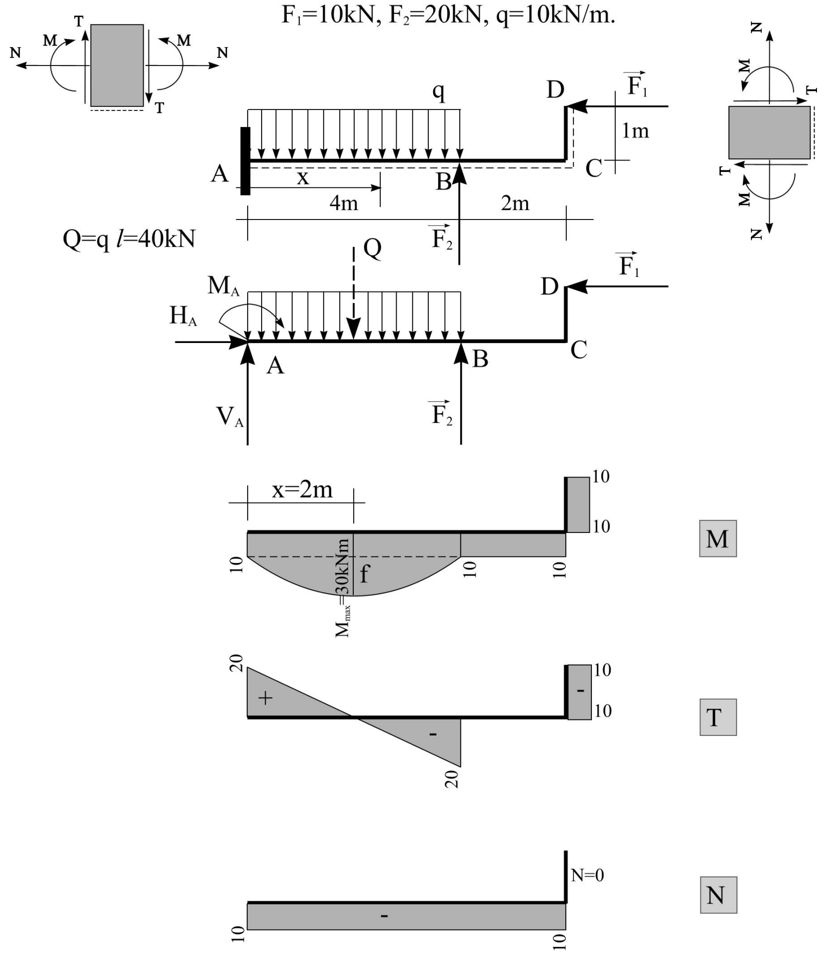
$$T_B^l = V_A - F_1 = 4 - 10 = -6\text{kN}, \quad T_B^d = F_2 = 4\text{kN}, \quad T_C = F_2 = 4\text{kN}.$$

Vrednosti normalnih sila su jednake nuli u svim presecima grednog nosača.
Maksimalni moment savijanja je na mestu delovanja sile F_1 što je očigledno iz dijagrama momenata savijanja i iznosi 16kNm.

8. Za dati nosač i opterećenje odrediti:

- dijagrame sila u presecima M, T i N;
- mesto i veličinu maksimalnog momenta savijanja.

F_1=10kN, F_2=20kN, q=10kN/m.



Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A - F_1 = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + F_2 - Q = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - Q \cdot 2 + F_2 \cdot 4 + F_1 \cdot 1 = 0. \qquad (3)$$

Reakcije veza su:

$(1) \quad \Rightarrow \quad H_A = 10\,\text{kN},$

$(2) \quad \Rightarrow \quad V_A = 20\,\text{kN},$

$(3) \quad \Rightarrow \quad M_A = 10\,\text{kNm}.$

Vrednosti momenata savijanja u karakterističnim presecima su:

$M_A = 10\text{kNm},$

$M_B = F_1 \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10\text{kNm},$

$M_C^l = F_1 \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10\text{kNm},$

$M_C^d = F_1 \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10\text{kNm},$

$M_D = 0.$

Raspodela momenata savijanja na delu CD je u obliku parabole drugog reda. Strela parabole je:

$$f = \frac{q l^2}{8} = \frac{10 \cdot 4^2}{8} = 20\text{kNm}.$$

Vrednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

$T_A = V_A = 20\text{kN},$

$T_B^l = V_A - Q = 20 - 40 = -20\text{kN}, \quad T_B^d = 0,$

$T_C^l = 0, \quad T_C^d = -F_1 = -10\text{kN},$

$T_D = -F_1 = -10\text{kN}.$

Vrednosti normalnih sila u karakterističnim presecima su:

$N_A = -H_A = -10\text{kN},$

$N_B^l = -H_A = -10\text{kN}, \quad N_B^d = -F_1 = -10\text{kN},$

$N_C^l = -H_A = -10\text{kN}, \quad N_C^d = 0,$

$N_D = 0.$

Da bi se odredilo mesto i veličina maksimalnog momenta savijanja (opasan presek) potrebno je izraz za transverzalnu silu izjednačiti sa nulom:

$T(x) = V_A - q \cdot x = 0,$

$20 - 10 \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\text{m}.$

Maksimalni moment savijanja je u preseku na rastojanju x=2m od oslonca A. Veličina maksimalnog momenta savijanja se određuje zamenom x=2m u izraz za moment savijanja na delu nosača AB:

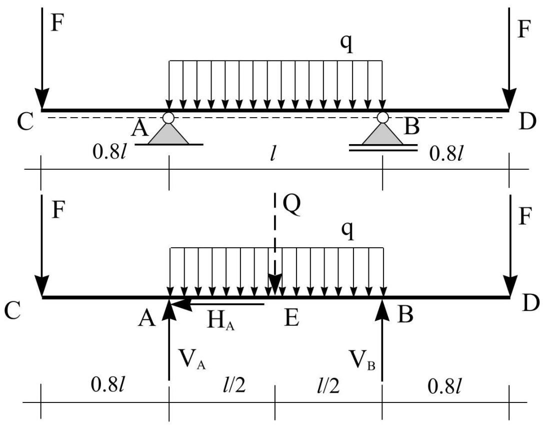
$$M(x) = M_A + V_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 10 + 20x - 10\frac{x^2}{2},$$

$$M_{max} = M_{x=2m} = 10 + 20 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 30\text{kNm}.$$

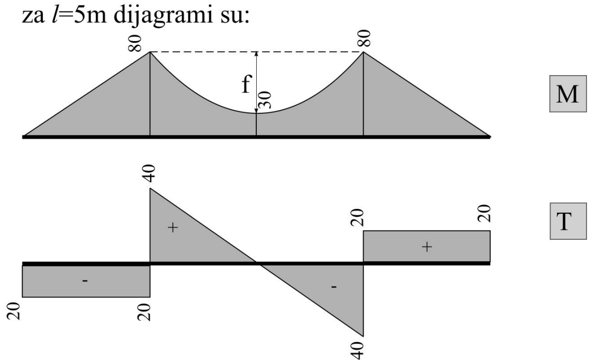
9. Za dati nosač i opterećenje:

- odrediti rastojanje l između oslonaca iz uslova da maksimalni moment savijanja između oslonaca A i B bude jednak po apsolutnoj vrednosti sa momentom savijanja iznad osloničkih preseka;
- za slučaj da je l=5m nacrtati dijagrame unutrašnjih sila M i T i odrediti mesto opasnog preseka u nosaču.

F=20kN, q=16kN/m.



za l=5m dijagrami su:



Iz jednačina ravnoteže mogu se odrediti vertikalne komponente reakcija veza:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \ V_A + V_B - F - F - Q = 0, \qquad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \ V_B \cdot l - Q \cdot \frac{l}{2} + F \cdot 0.8l - F \cdot (0.8l + l) = 0. \qquad (2)$$

$$(2) \Rightarrow V_B = F + \frac{Q}{2}, \quad (1) \Rightarrow V_A = F + \frac{Q}{2},$$

$$V_A = V_B = 20 + \frac{16l}{2} = 20 + 8l.$$

Maksimalni moment savijanja između oslonaca A i B je na sredini grede zbog simetričnog oslanjanja i opterećenja i iznosi:

$$M_E = V_A \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2}\frac{l}{4} - F\left(0.8l + 0.5l\right) = \left(20 + 8l\right)\frac{l}{2} - 2l^2 - 20 \cdot 1.3l = 2l^2 - 16l, \qquad (3)$$

a moment iznad osloračkog preseka je:

$$M_A = -20 \cdot 0.8l = -16l. \qquad (4)$$

Izjednačavanjem izraza (3) sa apsolutnom vrednošću momenta u preseku iznad oslonca dobija se:

$$M_E = \left|M_A\right| \Rightarrow 2l^2 - 16l = 16l \Rightarrow l = 16\text{m}.$$

Za slučaj da je l=5m reakcije veza su:

$$V_A = V_B = 20 + \frac{16 \cdot 5}{2} = 20 + 40 = 60\text{kN},$$

a momenti savijanja u karakterističnim presecima su:

$$M_C = M_D = 0,$$

$$M_E = V_A \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2}\frac{l}{4} - F\left(0.8l + 0.5l\right) = 60\frac{5}{2} - 16\frac{2.5^2}{8} - 20 \cdot 6.5 = -30\text{kNm},$$

$$M_A = M_B = -20 \cdot 0.8 \cdot 5 = -16 \cdot 5 = -80\text{kNm}.$$

Vednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

$$T_C = -F = -20\text{kN},$$

$$T_A^l = -F = -20\text{kN},$$

$$T_A^d = -F + V_A = -20 + 60 = -40\text{kN},$$

$$T_B^l = F - V_B = 20 - 60 = 40\text{kN},$$

$$T_B^d = F = 20\text{kN},$$

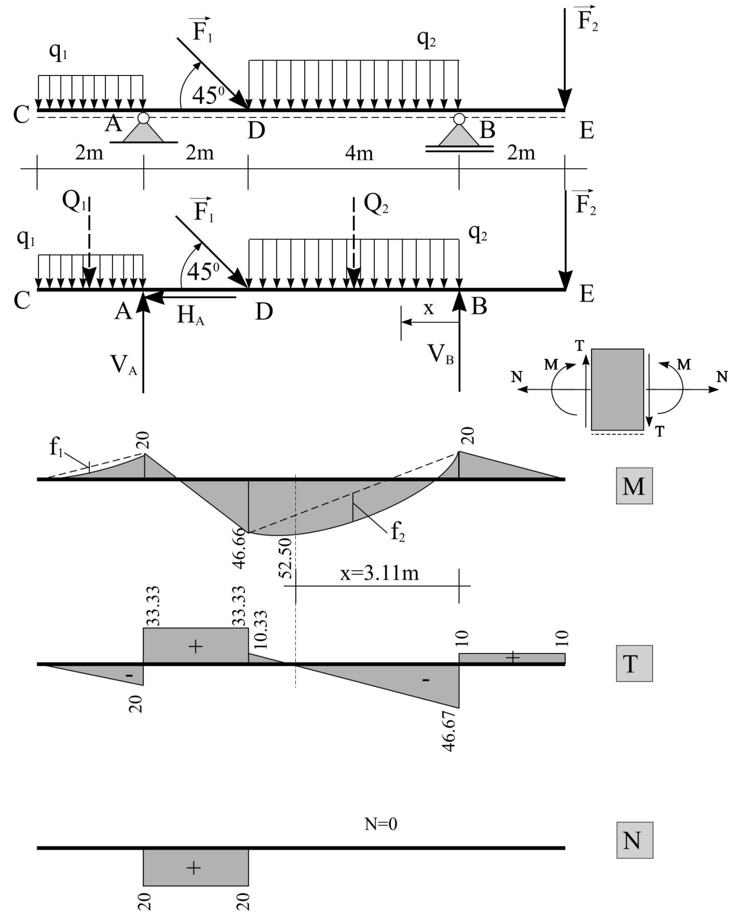
$$T_D = F = 20\text{kN}.$$

Opasni preseci su A i B u kojima je vrednost momenta savijanja najveća i iznosi 80kNm

10. Za dati nosač i opterećenje:

- analitičkim putem odrediti otpore oslonaca;
- nacrtati u pogodnoj razmeri dijagrame unutrašnjih sila M, T i N;
- odrediti vrednost momenta savijanja u opasnom preseku.

$F_1=20\sqrt{2}$kN, $F_2=10$kN, $q_1=10$kN/m, $q_2=15$kN/m.



Rezultante kontinualnih opterećenja su:

$Q_1=q_1 \cdot l_1=10 \cdot 2=20$ kN,

$Q_2=q_2 \cdot l_2=15 \cdot 4=60$ kN.

Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_A + F_1 \cos 45^o = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - F_1 \sin 45^o - F_2 - Q_1 - Q_2 = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 6 - F_1 \sin 45^o \cdot 2 - F_2 \cdot 8 + Q_1 \cdot 1 - Q_2 \cdot 4 = 0. \qquad (3)$$

Reakcije veza su:

$(1) \quad \Rightarrow \quad H_A = 20.0\,kN,$

$(3) \quad \Rightarrow \quad V_B = 56.67\,kN,$

$(2) \quad \Rightarrow \quad V_A = 53.33\,kN.$

Vrednosti momenata savijanja u karakterističnim presecima su:

$M_C = 0, \quad M_E = 0,$

$M_A = -Q_1 \cdot 1 = -20 \cdot 1 = -20kNm,$

$M_B = -F_2 \cdot 2 = -10 \cdot 2 = -20kNm,$

$M_D = -Q_1 \cdot 3 + V_A \cdot 2 = -20 \cdot 3 + 53.33 \cdot 2 = 46.66kNm.$

Raspodele momenata savijanja na delovima CA i DB su u obliku parabola drugog reda. Strele parabola su:

$$f_1 = \frac{q_1 l_1^2}{8} = \frac{10 \cdot 2^2}{8} = 5kNm, \qquad f_2 = \frac{q_2 l_2^2}{8} = \frac{15 \cdot 4^2}{8} = 30kNm.$$

Vednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

$T_C = 0,$

$T_A^l = -Q_1 = -20kN, \quad T_A^d = -Q_1 + V_A = -20 + 53.33 = 33.33kN,$

$T_D^l = -Q_1 + V_A = -20 + 53.33 = 33.33kN,$

$$T_D^d = -Q_1 + V_A - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = -20 + 53.33 - 20\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 13.33kN,$$

$T_B^l = F_2 - V_B = 10 - 56.67 = -46.67kN,$

$T_B^d = F_2 = 60kN,$

$T_D = F_2 = 60kN.$

Vednosti normalnih sila u karakterističnim presecima su:

$N_C = 0,$

$N_A^l = 0, \quad N_A^d = H_A = 20kN,$

$N_D^l = H_A = 20kN, \quad N_D^d = 0,$

$N_B^l = 0, \quad N_B^d = 0,$

$N_E = 0.$

Da bi se odredilo mesto i veličina maksimalnog momenta savijanja (opasan presek) potrebno je izraz za transverzalnu silu izjednačiti sa nulom:

$T(x) = F_2 - V_B + q_2 \cdot x = 0,$

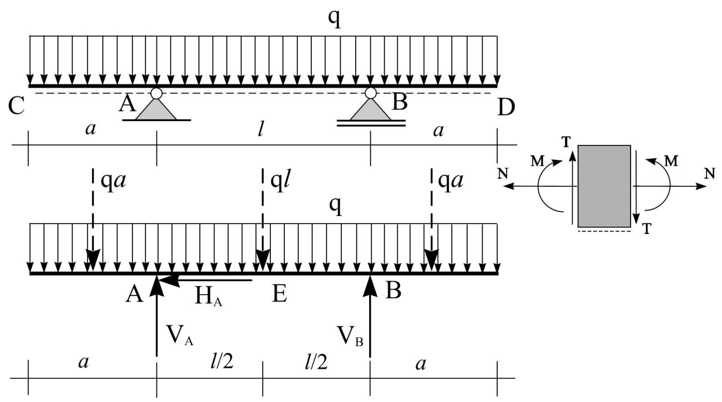
$10 - 56.67 + 15 \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3.11m.$

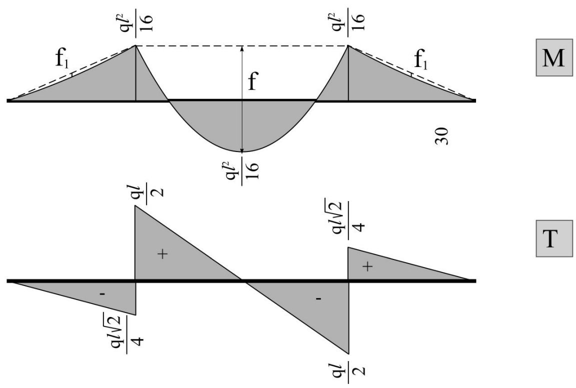
Veličina najvećeg momenta savijanja je:

$$M(x) = -F_2 \cdot (2+x) + V_B \cdot x - q_2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -10 \cdot (2+x) + 56.67 \cdot x - 15 \cdot x \cdot \frac{x}{2},$$

$$M_{max} = M_{x=3.11} = -10 \cdot (2 + 3.11) + 56.67 \cdot 3.11 - 15 \cdot 3.11 \cdot \frac{3.11}{2} = 52.5kNm.$$

11. Odrediti dužinu prepusta "a" iz uslova da oslonački momenti savijanja budu jednaki po apsolutnoj vrednosti sa momentom savijanja u sredini raspona grede, a zatim nacrati dijagrame unutrašnjih sila M i T u pogodnoj razmeri.





Iz jednačina ravnoteže mogu da se odrede vertikalne komponente reakcija veza:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \ V_A + V_B - qa - qa - ql = 0, \qquad (1)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \ V_B \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} + qa \cdot \frac{a}{2} - qa \cdot \left(l + \frac{a}{2} \right) = 0. \qquad (2)$$

$$(2),(1) \Rightarrow \ V_A = V_B = qa + \frac{ql}{2}.$$

Moment savijanja na sredini grede između oslonaca A i B je:

$$M_{\frac{l}{2}} = V_A \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2}\frac{l}{4} - qa\left(\frac{l}{2} + \frac{a}{2}\right) = \left(qa + \frac{ql}{2}\right)\frac{l}{2} - q\frac{l^2}{8} - qa \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{a}{2}\right) = q\frac{l^2}{8} - \frac{qa^2}{2}, \qquad (3)$$

a moment iznad oslonačkog preseka je:

$$M_A = -\frac{qa^2}{2}. \qquad (4)$$

Izjednačavanjem izraza (3) sa apsolutnom vrednošću momenta iznad oslonca dobija se:

$$M_{\frac{l}{2}} = \left|M_A\right| \Rightarrow \frac{ql^2}{8} - \frac{qa^2}{2} = \frac{qa^2}{2} \Rightarrow a = \frac{l\sqrt{2}}{4}.$$

Zamenom $a = \dfrac{l\sqrt{2}}{4}$ u (3) i (4) dobija se:

$$M_A = M_B = -\frac{ql^2}{16}, \quad M_E = -\frac{ql^2}{16}.$$

Vednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

$$T_C = 0,$$

$$T_A^l = -q \cdot a = -q\frac{l\sqrt{2}}{4}, \quad T_A^d = -q \cdot a + V_A = -q\frac{l\sqrt{2}}{4} + q\frac{l\sqrt{2}}{4} + \frac{ql}{2} = \frac{ql}{2},$$

$$T_B^l = q \cdot a - V_B = q\frac{l\sqrt{2}}{4} - q\frac{l\sqrt{2}}{4} - \frac{ql}{2} = -\frac{ql}{2},$$

$$T_B^d = q \cdot a = q\frac{l\sqrt{2}}{4},$$

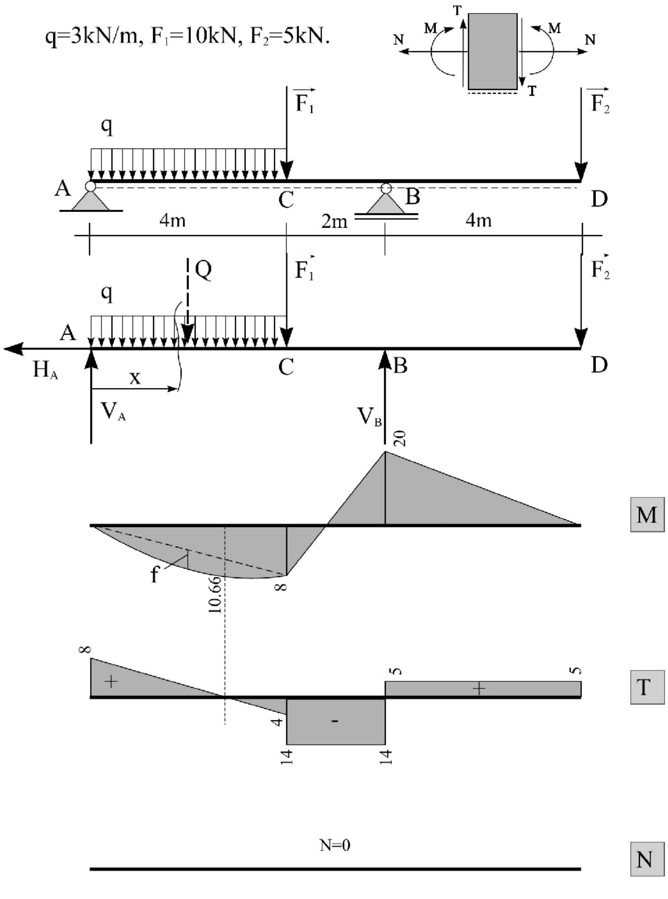
$$T_D = 0.$$

Strele parabola su:

$$f = \frac{ql^2}{8}, \quad f_1 = \frac{qa^2}{8} = \frac{ql^2}{64}.$$

12. Za dati nosač i opterećenje odrediti:

- reakcije oslonaca;
- dijagrame sila u presecima M, T i N;
- mesto i veličinu maksimalnog momenta savijanja.



Rezultanta kontinualnog opterećenja je:
$Q = q \cdot l = 3 \cdot 4 = 12\text{kN}$.

Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_A = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - F_1 - F_2 - Q = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 6 - F_1 \cdot 4 - F_2 \cdot 10 - Q \cdot 2 = 0, \qquad (3)$$

a reakcije veza su:

$$(1) \Rightarrow \quad H_A = 0\,\text{kN}, \quad (3) \Rightarrow \quad V_B = 19\,\text{kN}, \quad (2) \Rightarrow \quad V_A = 8\,\text{kN}.$$

Vrednosti momenata savijanja u karakterističnim presecima su:

$M_A = 0, \quad M_D = 0,$

$M_C = V_A \cdot 4 - Q \cdot 2 = 8 \cdot 4 - 12 \cdot 2 = 8\text{kNm},$

$M_B = -F_2 \cdot 4 = -5 \cdot 4 = -20\text{kNm}.$

Strela parabole u polju AC je:

$$f = \frac{ql^2}{8} = \frac{3 \cdot 4^2}{8} = 6\text{kNm}.$$

Vednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

$T_A = V_A = 8\text{kN},$

$T_C^l = V_A - Q = 8 - 12 = -4\text{kN}, \quad T_C^d = V_A - Q - F_1 = 8 - 12 - 10 = -14\text{kN},$

$T_B^l = F_2 - V_B = 5 - 19 = -14\text{kN}, \quad T_B^d = F_2 = 5\text{kN},$

$T_D = F_2 = 5\text{kN}.$

Mesto maksimalnog momenta dobija se iz uslova da je transverzalna sila jednaka nuli:

$T(x) = V_A - q \cdot x = 0,$

$8 - 3 \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.667\text{m}.$

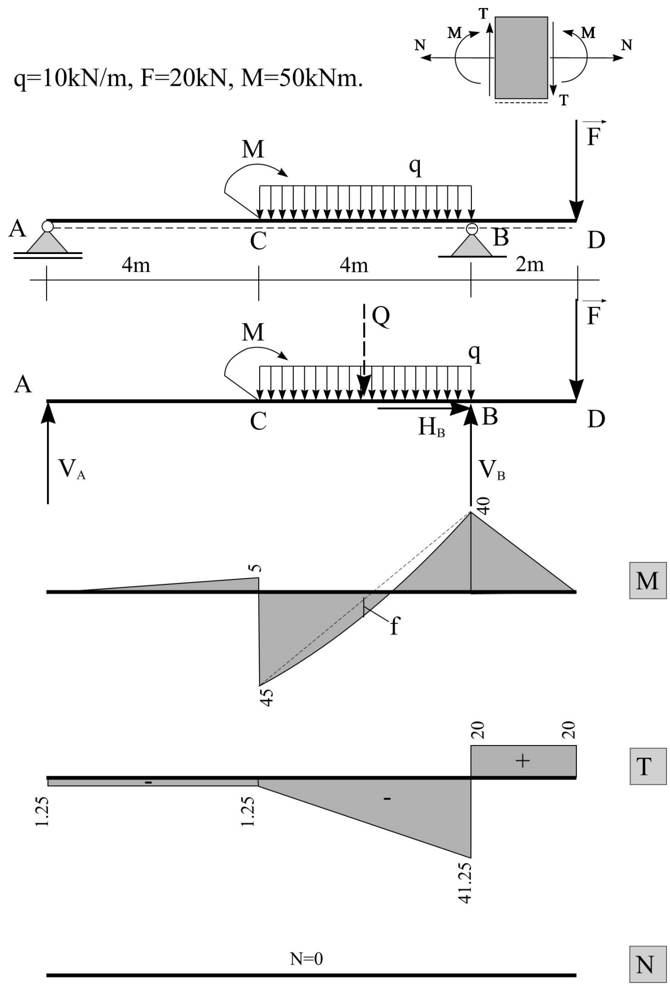
Veličina najvećeg momenta savijanja je:

$$M(x) = V_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 8 \cdot x - 3\frac{x^2}{2},$$

$$M_{max} = M_{x=2.667} = 8 \cdot 2.667 - 3 \cdot 2.667 \cdot \frac{2.667}{2} = 10.66\text{kNm}.$$

13. Za datu gredu i opterećenje odrediti:

- reakcije oslonaca;
- dijagrame sila u presecima M, T i N;
- položaj i veličinu maksimalnog momenta savijanja.



Rezultanta kontinualnog opterećenja je:

$Q = q \cdot l = 10 \cdot 4 = 40\,\text{kN}$.

Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_B = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - F - Q = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -V_A \cdot 8 - F \cdot 2 + Q \cdot 2 - M = 0, \qquad (3)$$

a reakcije veza su:

$$(1) \Rightarrow H_B = 0\,\text{kN},$$
$$(3) \Rightarrow V_A = -1.25\,\text{kN},$$
$$(2) \Rightarrow V_B = 61.25\,\text{kN}.$$

Vrednosti momenata savijanja u karakterističnim presecima su:

$$M_A = 0, \quad M_D = 0,$$
$$M_C = V_A \cdot 4 = (-1.25) \cdot 4 = -5\text{kNm},$$
$$M_B = -F \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40\text{kNm}.$$

Strela parabole je:

$$f = \frac{q l^2}{8} = \frac{10 \cdot 4^2}{8} = 20\text{kNm}.$$

Vednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

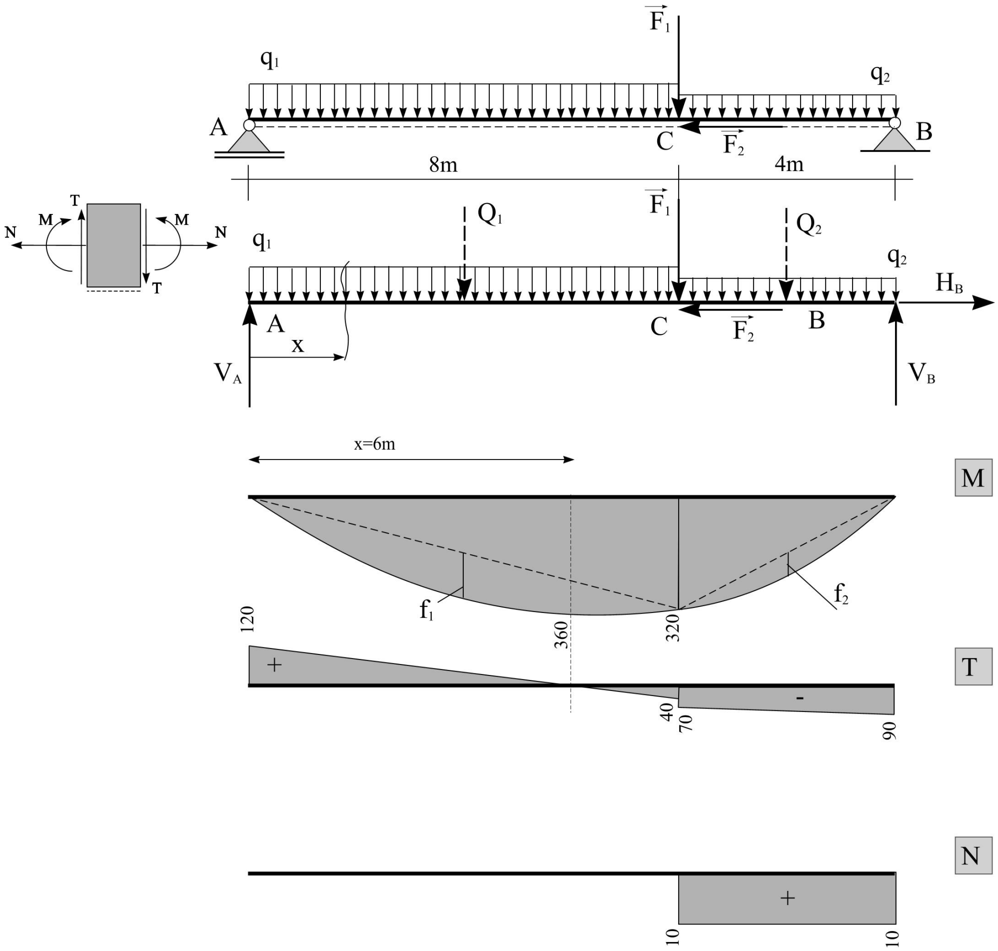
$$T_A = V_A = -1.25\text{kN},$$
$$T_C^l = V_A = -1.25\text{kN}, \quad T_C^d = V_A = -1.25\text{kN},$$
$$T_B^l = F - V_B = 20 - 61.25 = -41.25\text{kN}, \quad T_B^d = F = 20\text{kN},$$
$$T_D = F = 20\text{kN}.$$

Trasverzalna sila nema nultu vrednost u polju CB, pa moment nema ekstremnu vrednost u polju. Sa dijagrama momenata je očigledno da je opasan presek u C gde je najveća vrednost momenta savijanja od 45kNm.

14. Za datu gredu i opterećenje odrediti:

- reakcije oslonaca;
- dijagrame sila u presecima M, T i N;
- položaj i veličinu maksimalnog momenta savijanja.

F_1=30kN, F_2=10kN, q_1=20kN/m, q_2=5kN/m.



Rezultante kontinualnih opterećenja su:

$Q_1 = q_1 \cdot l_1 = 20 \cdot 8 = 160\,kN$, $\quad Q_2 = q_2 \cdot l_2 = 5 \cdot 4 = 20\,kN$.

Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_B - F_2 = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - F_1 - Q_1 - Q_2 = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 12 - F_1 \cdot 8 - Q_1 \cdot 4 - Q_2 \cdot 10 = 0, \qquad (3)$$

a reakcije veza su:

$(1) \Rightarrow H_B = 10\,kN,$

$(3) \Rightarrow V_B = 90\,kN,$

$(2) \Rightarrow V_A = 120\,kN.$

Vrednosti momenata savijanja u karakterističnim presecima su:

$M_A = 0, \quad M_B = 0,$

$M_C = V_A \cdot 8 - Q_1 \cdot 4 = 120 \cdot 8 - 160 \cdot 4 = 320kNm.$

Raspodele momenata savijanja na delovima AC i CB su u obliku parabola drugog reda. Strele parabola su:

$$f_1 = \frac{q_1 l_1^2}{8} = \frac{20 \cdot 8^2}{8} = 160kNm, \quad f_2 = \frac{q_2 l_2^2}{8} = \frac{5 \cdot 4^2}{8} = 10kNm.$$

Vednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

$T_A = V_A = 120kN,$

$T_C^l = V_A - Q_1 = 120 - 160 = -40kN,$

$T_C^d = V_A - Q_1 - F_1 = 120 - 160 - 30 = -70kN,$

$T_B = -V_B = -90kN.$

Maksimalna vrednost momenta savijanja se nalazi u preseku u kome je transverzalna sila jednaka nuli. Da bi se odredilo mesto i veličina maksimalnog momenta savijanja (opasan presek) potrebno je izraz za transverzalnu silu izjednačiti sa nulom:

$T(x) = V_A - q_1 \cdot x = 0,$

$120 - 20 \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6m.$

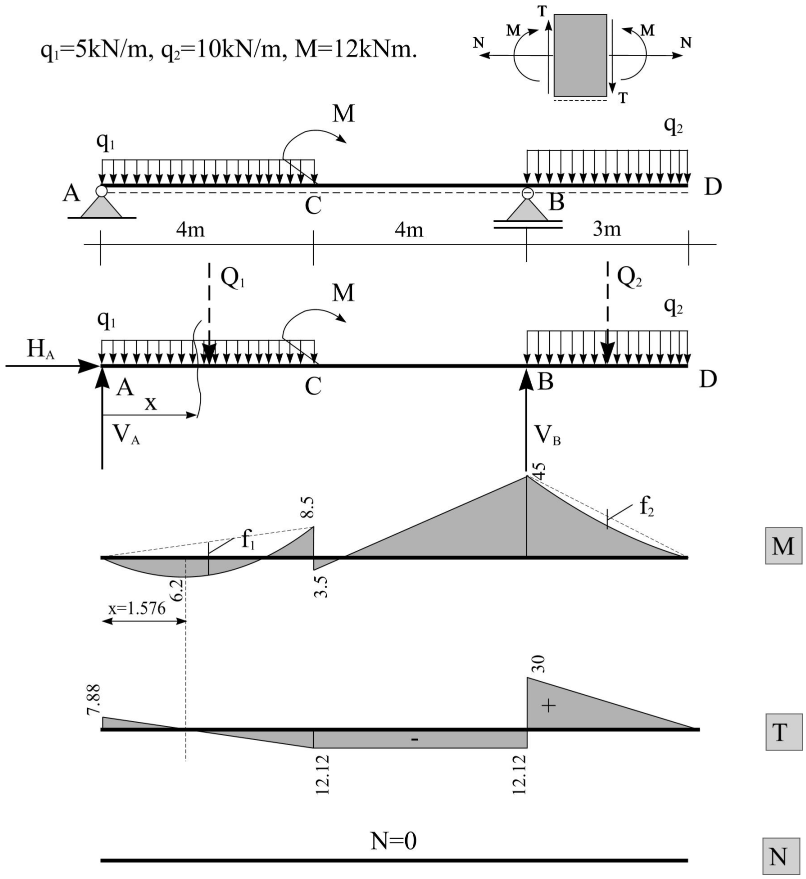
Maksimalni moment savijanja je u preseku na rastojanju x=6m od oslonca A. Njegova vrednost se dobija zamenom x=6m u izraz za moment savijanja na delu nosača AC:

$$M(x) = V_A \cdot x - q_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 120 \cdot x - 20 \cdot x \cdot \frac{x}{2},$$

$$M_{max} = M_{x=6m} = 120 \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = 360\,kNm.$$

15. Nacrtati dijagrame sila M, T, i N i odrediti mesto i veličinu maksimalnog momenta savijanja na delu AC grede.

q_1=5kN/m, q_2=10kN/m, M=12kNm.



Rezultante kontinualnih opterećenja su:

$Q_1 = q_1 \cdot l_1 = 5 \cdot 4 = 20\,kN$,

$Q_2 = q_2 \cdot l_2 = 10 \cdot 3 = 30\,kN$.

Jednačine ravnoteže glase:

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - Q_1 - Q_2 = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 8 - Q_1 \cdot 2 - Q_2 \cdot 9.5 - M = 0. \qquad (3)$$

Reakcije veza su:

$(1) \Rightarrow H_A = 0$,

$(3) \Rightarrow V_B = 42.13\,kN$,

$(2) \Rightarrow V_A = 7.88\,kN$.

Vrednosti momenata savijanja u karakterističnim presecima su:

$M_A = 0, \quad M_D = 0,$

$M_C^l = V_A \cdot 4 - Q_1 \cdot 2 = 7.88 \cdot 4 - 20 \cdot 2 = -8.5\text{kNm},$

$M_C^d = V_A \cdot 4 - Q_1 \cdot 2 + M = 7.88 \cdot 4 - 20 \cdot 2 + 12 = 3.5\text{kNm}$

$M_B = -Q_2 \cdot 1.5 = -30 \cdot 1.5 = -45\text{kNm}.$

Raspodele momenata savijanja na delovima AC i BD su u obliku parabola drugog reda.
Strele parabola su:

$$f_1 = \frac{q_1 l_1^2}{8} = \frac{5 \cdot 4^2}{8} = 10\text{kNm}, \quad f_2 = \frac{q_2 l_2^2}{8} = \frac{10 \cdot 3^2}{8} = 11.25\text{kNm}.$$

Vednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

$T_A = V_A = 7.88\text{kN},$

$T_C^l = V_A - Q_1 = 7.88 - 20 = -12.12\text{kN}, \quad T_C^d = V_A - Q_1 = -12.12\text{kN},$

$T_B^l = Q_2 - V_B = 30 - 42.13 = -12.12\text{kN},$

$T_B^d = Q_2 = 30\text{kN}$

$T_D = 0.$

Maksimalna vrednost momenta savijanja se nalazi u preseku u kome je transverzalna sila jednaka nuli. Da bi se odredilo mesto i veličina maksimalnog momenta savijanja (opasan presek) potrebno je izraz za transverzalnu silu na tom delu nosača izjednačiti sa nulom:

$T_x = V_A - q \cdot x = 0,$

$7.88 - 5 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 1.576\text{m}.$

Vrednost maksimalnog momenta na delu nosača AC se dobija zamenom x=1.576m u izraz za moment savijanja:

$$M(x) = V_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2},$$

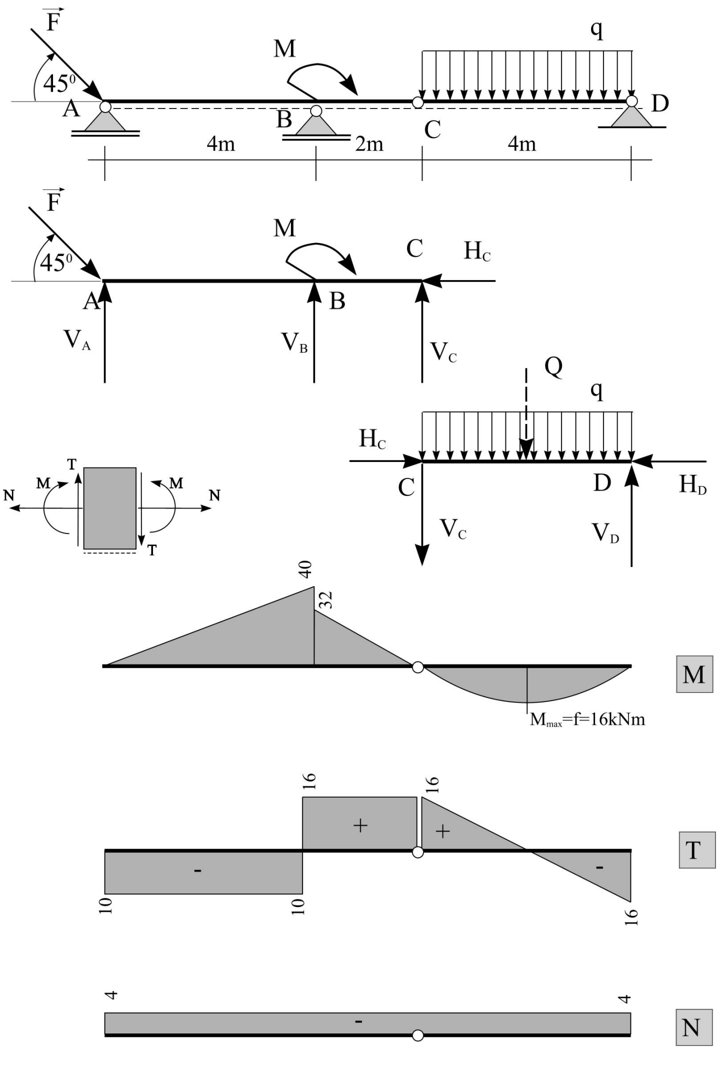
$$M_{x=1.576} = 7.88 \cdot 1.576 - 5 \cdot 1.576 \cdot \frac{1.576}{2} = 6.2\text{kNm}.$$

Sa dijagrama momenata savijanja se vidi da je po apsolutnoj vrednosti veći moment nad osloncem B, od 45kNm, pa je to presek B opasan presek.

16. Za gredni nosač i opterećenje odrediti:

- analitičkim putem reakcije veza;
- dijagrame sila u presecima M, T i N;
- maksimalni moment savijanja posebno na gredi ABC, a posebno na gredi CD.

$F=4\sqrt{2}$ kN, M=8kNm, q=8kN/m.



Rezultanta kontinualnog opterećenja je
$Q=q\cdot l=8\cdot 4=32$ kN.

Prvo treba odrediti reakcije veza iz jednačina ravnoteže:

- ravnoteža tela ABC:

$\sum X = 0 \Rightarrow -H_C + F\cos 45^o = 0,$ (1)

$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B + V_C - F\sin 45^o = 0,$ (2)

$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 4 + V_C \cdot 6 - M = 0,$ (3)

- ravnoteža tela CD:

$\sum X = 0 \Rightarrow H_C - H_D = 0,$ (4)

$\sum Y = 0 \Rightarrow V_D - V_C - Q = 0,$ (5)

$\sum M_C = 0 \Rightarrow V_D \cdot 4 - Q \cdot 2 = 0.$ (6)

Reakcije veza su:

$(6) \Rightarrow V_C = -16\,\text{kN}, \quad (5) \Rightarrow V_D = 16\,\text{kN}, \quad (1) \Rightarrow H_C = 4\,\text{kN},$

$(4) \Rightarrow H_D = 4\,\text{kN}, \quad (3) \Rightarrow V_B = 26\,\text{kN}, \quad (2) \Rightarrow V_A = -6\,\text{kNm}.$

Vrednosti momenata savijanja u karakterističnim presecima su:

$M_A = 0, \quad M_D = 0, \quad M_C = 0,$

$$M_B^l = V_A \cdot 4 - F\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 = (-6) \cdot 4 - 4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 = -40\text{kNm},$$

$$M_B^d = V_A \cdot 4 - F\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 + M = (-6) \cdot 4 - 4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 + 8 = -32\text{kNm}.$$

Vednosti transverzalnih sila u karakterističnim presecima su:

$$T_A = V_A - F\frac{\sqrt{2}}{2} = -6 - 4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -10\text{kN},$$

$$T_B^l = V_A - F\frac{\sqrt{2}}{2} = -6 - 4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -10\text{kN},$$

$$T_B^d = V_A - F\frac{\sqrt{2}}{2} + V_B = -6 - 4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 26 = 16\text{kN},$$

$$T_C^l = -V_C = -(-16) = 16\text{kN}, \quad T_C^d = -V_C = -(-16) = 16\text{kN}, \quad T_D = -V_D = -16\text{kN}.$$

Vednosti normalnih sila u karakterističnim presecima su:

$$N_A = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -4\text{kN},$$

$$N_B^l = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -4\text{kN}, \quad N_B^d = -F\frac{\sqrt{2}}{2} = -4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -4\text{kN},$$

$$N_C^l = -H_C = -4\text{kN}, \quad N_C^d = -H_C = -4\text{kN}, \quad N_D = -H_D = -4\text{kN}.$$

Maksimalni moment savijanja na gredi ABC je 40kNm po apsolutnoj vrednosti, što je očigledno na osnovu dijagrama momenata savijanja. Na delu CD transverzalna sila se linearno menja i pri tome menja znak, tj. u jednom preseku je jednaka nuli.

Taj presek je na sredini grede CD, jer su iste vrednosti transverzalne sile u presecima C i D. Strela parabole u dijagramu momenta savijanja je $f = \frac{q l^2}{8} = \frac{8 \cdot 4^2}{8} = 16\text{kNm}$, što je ujedno maksimalna vrednost momenta savijanja na gredi CD.

LITERATURA

1. S.M.Targ: *Teorijska mehanika, kratak kurs, XI izdanje*, Građevinska knjiga, Beograd, 1996.

2. Lazar Rusov: *Mehanika I, Statika*, Naučna knjiga, Beograd, 1982.

3. Milan Mićunović, Milan Kojić: *Statika*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

4. Nikola Sokolović: *Mehanika I, zbirka rešenih zadataka*, Studentska zadruga Građevinskog fakulteta u Nišu, Niš, 1976.

5. I.V.Meščerski: *Zbirka zadataka iz teorijske mehanike*, Građevinska knjiga, Beograd, 1979.

6. H.L.Langhaar, A.P.Boresi: *Engineering Mechanics*, McGraw-Hill book company, INC New York, Toronto, London, 1959.

7. R.C.Hibbeler: *Statics and Mechanics of Materials*, Pearson Prentice Hall, Pearson Education International, New Jersey, 2004.

8. Ratko G. Pavlović: *Mehanika I, Statika, II izdanje*, Izdavačka jedinica Univerziteta u Nišu, Niš, 2001.

9. Tomislav Igić, Marina Mijalković, Marina Trajković: *Tehnička mehanika I, zbirka zadataka*, Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerziteta u Nišu, Niš, 2004.

10. B. Veličković, O. Stanković, O. Damjanović Juhas, D. Veličković, D. Jovanović: *Statika i otpornost materijala, teoretski deo, za drugi razred građevinske škole*, Zavod za izdavanje udžbenika i nastavna sredstva Beograd, 2001.